Investigate gravity IR effects on quantum mechanics through minimum momentum uncertainty

SH. Talakesh[I], M. Zarei[II], B. Mirza[II]

[I] Mobarakeh Islamic Azad University, Sciences department, 84819-14411
[II] Isfahan Industrial University, Physics department, 84156-83111

Receive: 2011.06.10
Accept: 2012.01.29

Abstract

In this paper we investigate grayity IR effects on quantum machanics considering minimum momentum. First, we investigate afew cases in quantum mechanics by minimum momentum, also we show hydrogen atom spectrum is corrected and produce limit on minimum momentum by prices measurements done on hydrogen atom. also we investigate aharonove-bohm effect and show its topological phase is corrected. Considering appropriate experiments, this corrections will be observed.

Keywords
Minimum momentum;
uncertainty-IR effects.

مجلهٔ فیزیک کاربردی دانشگاه الزهرا (س)، شمارهٔ ۱، پاییز و زمستان ۱۳۹۰، ص. ۹-۲۴

بررســی اثـرات IR گرانــش بــر مکانیک کوانتومــی از طریق عــدم قطعیت کمینه در تکانه

شهرزاد طلاکش[I]، مسلم زارعی[II]، بهروز میرزا[II]
[I] گروه فیزیک دانشگاه آزاد اسلامی واحد مبارکه؛ shahrzad-talakesh@yahoo.com
[II] گروه فیزیک دانشگاه صنعتی اصفهان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۰۳/۲۰
تاریخ تصویب: ۱۳۹۰/۱۱/۰۹

چکیده
در این مقاله ما اثرات IR گرانش را بر مکانیک کوانتومی با در نظر گرفتن تکانه‌ی کمینه بررسی می کنیم. در ابتدا چند مسئله را در مکانیک کوانتومی با کمینه‌ی تکانه مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین نشان خواهیم داد که طیف اتم هیدروژن تصحیح می‌شــود و با توجه به اندازه گیری‌های دقیق انجام شــده روی طیف اتم هیدروژن می‌تــوان روی تکانه‌ی کمینه حد گذاشت. همچنین اثر آهارونوف-بوهم[1] را بررسی کرده و نشان می‌دهیم که فاز توپولوژیک آن تصحیح می‌شــود که می‌تــوان با در نظر گرفتن آزمایش‌های مناسب این تصحیحات را مشاهده کرد.

واژه‌های کلیدی: عدم قطعیت، کمینهٔ تکانه

۱. مقدمه

عــدم قطعیت کمینه در تکانه نتیجــه‌ای از اثرات IR گرانش روی یک سیســتم مکانیک کوانتومی می‌باشــد. همانطور که عدم قطعیت کمینــه در مکان نتیجه‌ی اثرات UV گرانش در فواصل بســیار کوچک اســت. طــول کمینه را می‌توان به طور موثر با در نظر گرفتــن عدم قطعیت کمینه در مکان ذره مورد بررسی قرار داد. به طور کلی عدم قطعیت کمینه در تکانه و مکان یک ذره نتیجه‌ی اثرات گرانشــی در حد IR و UV می‌باشــند [۱،۲،۳]. از آنجا که بررسی مستقیم اثرات IR گرانش بر روی مکانیــک کوانتومی مســتلزم در نظر گرفتن زمینــه‌ای با فضا زمان خمیده ریمانی اســت و این خود دشواری‌های زیادی را به همراه دارد بنابراین ما در اینجا با در نظر گرفتن تکانه‌ی کمینه این کار را به

[1] Aharonov-bohm

طور موثر انجام می‌دهیم. در مقاله [۴] طیف وسیعی از مسائل مکانیک کوانتومی به این روش بررسی شـــده است. در اینجا ما این مطالعات را برای مســـائل دیگری انجام می‌دهیم. در بخش بعد مکانیک کوانتومـــی با عدم قطعیت کمینه در تکانه را فرمول‌بندی می کنیم. ســـپس ایـــن فرمول‌بندی را برای مسائلی که حل دقیق دارند به کار می‌بریم. این مسئله در اتم هیدروژن دارای اهمیت است، زیرا ویژه مقادیر آن به گونه‌ای تصحیح می‌شـــوند که ممکن اســـت با کمک آن بتوان حدودی بر پارامترهای کمینه تکانه گذاشـــت. ســـپس به بررســـی اثر آهارونوف-بوهم می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که فاز آهارونوف-بوهم بر اثر تکانه‌ی کمینه به مســـاحت جاروب شده توسط ذره‌ی مورد آزمایش وابسته می‌شود. این نشان می‌دهد که اگر آزمایش را به گونه‌ای طراحی کنیم که سطح قابل تغییر باشد، آنگاه تغییرات فاز وابسته به سطح هم قابل مشاهده خواهد بود.

۲. عدم قطعیت کمینه در تکانه

عدم قطعیت کمینه در تکانه ترجمان مکانیک کوانتومی مفهوم کمینه تکانه است که به علت اثرات IR گرانشی روی می‌دهد. با بررسی مکانیک کوانتومی روی خمینه‌های ریمانی به نتایج جالبی می‌رسیم [۱،۲،۳]. روی یک خمینه ریمانی، تکانه تعریف جدیدی به صورت «مولد تغییرات بســـیار کوچک مختصـــات ژئودزیک از یک رویداد به رویداد دیگر» خواهد یافت و در نتیجه تکانه‌های مختلف با یکدیگر جابجا نمی‌شوند [۶،۵]. روابط جابجایی عملگرهای تکانه و مکان نیز تغییر می کنند. یک نوع خاص از این روابط جابجایی تغییر یافته منجر به عدم قطعیت کمینه در تکانه می‌شود. ظهور این عدم قطعیت کمینه را می‌توان با دلایل خوبی توضیح داد. در مکانیک کوانتومی وقتی (روی یک فضای تخت) تکانه ذره با دقت زیاد اندازه‌گیری می‌شود، به این معناست که تابع موج آن ذره در کل فضا گسترش دارد یعنی با یک موج تخت توصیف می‌شود. اما در یک فضای خمیده دلخواه مفهومی از موج تخت سراسری قابل تصور نیست و این خود گویای این مطلب است که نمی‌توان تکانه را دقیقاً اندازه‌گیری کرد و یک حد کمینه برای آن وجود دارد.

بررسی‌های انجام شده در مکانیک کوانتومی، روی فضاهای خمیده منجر به پیشنهاد جبر هایزنبرگ جدیدی به صورت زیر شده است [۵،۱،۲،۳]:

$$\left[x_i, p_j\right] = i\hbar\Theta_{ij}(x,p) \qquad (1)$$

در نظـــر خواهیـــم گرفت که منجـــر به عدم قطعیت کمینـــه در تکانه می‌شـــوند. در دو بخش آینده عبارتهایی بر Θ_{ij} شوند.

در بخش‌هـــای بعـــد از آن نیـــز چنـــد مســـئله مکانیـــک کوانتومـــی را با فـــرض کمینـــه تکانه حل خواهیم نمود.

۳. جبر هایزنبرگ تعمیم یافته با جمله مجذوری γx^2

ابتدا جبر هایزنبرگ را در یک بعد به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Theta(x)=1+\gamma x^2 \Rightarrow [\hat{x},\hat{p}]=i\hbar(1+\gamma x^2) \tag{۲}$$

$\hat{p}$ و $\hat{x}$ عملگرهای هرمیتی که تکانه و مکان هستند. با استفاده از تعریف معمولی عدم قطعیت دو مشاهده‌پذیر فیزیکی و با انجام محاسباتی می‌توان نشان داد که این جبر (با فرض صفر شدن مقدار چشمداشتی $\langle x\rangle$) به عدم قطعیت کمینه تکانه

$$\Delta p_0=\hbar\sqrt{\gamma} \tag{۳}$$

منجر می‌شود. در اینجا فرض می‌کنیم که عدم قطعیت کمینه در مکان وجود ندارد. بنابراین فضای مکان دست‌نخورده باقی می‌ماند و می‌توان جبر جدید را روی فضای مکان توابع موج نمایش داد.

در فضای مکان عملگرهای x و p به صورت زیر روی توابع موج $\psi(\mathrm{x})$ عمل می‌کنند.

$$\hat{x}\psi(x)=x\psi(x) \tag{۴}$$

$$\hat{p}\psi(x)=i\hbar(1+\gamma x^2)\partial_x\psi(x) \tag{۵}$$

همچنین برای ضرب داخلی دو کت دلخواه، ویژه حالت‌های مکان و همچنین عملگر واحد داریم:

$$\langle\psi\,|\,\phi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+\gamma x^2}\psi^*(x)\phi(x) \tag{۶}$$

$$\langle x\,|\,x'\rangle=(1+\gamma x^2)\delta(x-x') \tag{۷}$$

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+\gamma x^2}\,|\,x\rangle\langle x\,| \tag{۸}$$

رابطه جابجایی (۲) را به n بعد نیز می‌توان تعمیم داد. بدین صورت که:

$$[\hat{x}_i,\hat{p}_j]=i\hbar(1+\gamma r^2)\delta_{ij} \quad ، \quad r^2=\sum_i x_i^2 \tag{۹}$$

در این حالت روی هر مولفه تکانه عدم قطعیت تکانه داریم. همچنین در فضای مختصات عملگرهای مکان و تکانه به صورت زیر عمل می‌کنند:

$$\hat{x}_i\psi(x)=x_i\psi(x) \tag{۱۰}$$

$$\hat{p}_i\psi(x)=i\hbar(1+\gamma r^2)\partial_i\psi(x) \tag{۱۱}$$

٤. جبر هایزنبرگ تعمیم یافته با جمله γx

رابطه جابجایی زیر را به صورت یک بعدی در نظر می‌گیریم:

$$[\hat{x},\hat{p}]=i\hbar(1+\gamma x) \tag{۱۲}$$

در اینجا نشان می‌دهیم که این رابطه جابجایی نیز به عدم قطعیت کمینه در تکانه منجر می‌شود. برای اثبات این مطلب ابتدا عدم قطعیت بین x و p را به دست می‌آوریم. با استفاده از تعریف معمولی عدم قطعیت بین دو عملگر، داریم:

$$\Delta x\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}(1+\gamma\sqrt{\langle x^2\rangle - \langle \Delta x\rangle^2}) \qquad (۱۳)$$

از تعریف عدم قطعیت x

$$(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 \qquad (۱۴)$$

مشخص است که کمیت زیر رادیکال، در رابطه (۱۳) یک کمیت مثبت است و با تقسیم طرفین (۱۳) بر Δx داریم:

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}(\frac{1}{\Delta x}+\gamma\sqrt{\frac{\langle x^2\rangle}{(\Delta x)^2}-1}) \qquad (۱۵)$$

تفاوت (۱۵) با رابطه عدم قطعیت عادی بین x و p در جمله $\gamma\sqrt{\frac{\langle x^2\rangle}{(\Delta x)^2}-1}$ می‌باشد. این جمله را با Λ نشان می‌دهیم. حال اگر به منظور کوچک شدن Δp (یعنی دقیقتر شدن اندازه‌گیری تکانه) Δx را افزایش دهیم، آنگاه $\langle x^2\rangle$ نیز افزایش خواهد یافت تا عبارت زیر رادیکال همواره مثبت بماند. در واقع دیده می شـود که به ازای هر Δx در طرف راست رابطه (۱۵) همیشه یک کمیت مثبت Λ داریم. به عبارت دیگر همواره $\Delta p>0$. یعنی عدم قطعیت تکانه، حد کمینه‌ای دارد. البته منوط به اینکه حالتهایی را در نظر بگیریم که در آن شرط $\langle x^2\rangle \neq (\Delta x)^2$ برقرار باشد.

عملگرهای $\hat{x}$ و $\hat{p}$ در فضای هیلبرت مکان به صورت زیر

$$\hat{x}\psi(x) = x\psi(x) \qquad (۱۶)$$

$$\hat{p}\psi(x) = i\hbar(1+\gamma x)\partial_x\psi(x) \qquad (۱۷)$$

روی توابـع موج عمل می کنند. همچنین در اینجا نیز لازم اسـت که عامـل $\frac{1}{1+\gamma x}$ را وارد فضای هیلبرت کنیم. مثلاً برای ضرب داخلی داریم:

$$\langle\psi\,|\,\phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+\gamma x}\psi^*(x)\phi(x) \qquad (۱۸)$$

همچنین اگر γx را بسیار کوچک فرض کنیم و xرا کراندار در نظر بگیریم، آنگاه داریم: $0 \leq \langle\psi\,|\,\psi\rangle$.
در ادامه دو مساله را با استفاده از جبر (۱۲) و اعمال تبدیلات (۱۶) و (۱۷) بررسی می کنیم.

۵. نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی

به عنوان اولین مثال از مکانیک کوانتومی کمینه تکانه، مسـاله نوسـانگر هماهنگ یک بعدی را بر اسـاس جبر تعمیم یافته (۱۲) حل می کنیم. در اینجا چـون در فضای مکان کار می کنیم و تبدیلات (۱۶) و (۱۷) را داریم، هامیلتونی نوسانگر هماهنگ یک بعدی به صورت عملگری

$$\widehat{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \tag{۱۹}$$

و ویژه مقادیر انرژی آن $E_n = \hbar\omega\,(n+\frac{1}{2})$ می‌باشد.

با اعمال تبدیلات (۱۶) و (۱۷) برهامیلتونی داریم:

$$\widehat{H} = \frac{1}{2m}\left[i\hbar\,(1+\gamma\,x)\frac{\partial}{\partial x}\right]^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \tag{۲۰}$$

و با تغییر متغیر $u = \frac{-1}{\alpha}\ln\left(1+\gamma\,x\right)$ خواهیم داشت:

$$(1+\gamma\,x)\frac{\partial}{\partial x} = \frac{-\partial}{\partial u} \tag{۲۱}$$

بنابراین هامیلتونی نوسانگر به صورت زیر تبدیل می‌شود:

(۲۲)

$$\hat{H} = \frac{-\hbar^2}{2m}(\frac{\partial}{\partial u})^2 + \frac{1}{2} m\omega^2\left[\frac{1}{\gamma}(e^{-\gamma u}-1)\right]^2 = \frac{-\hbar^2}{2m}\left[\frac{d^2}{du^2}\right] + \frac{1}{2} m(\frac{\omega}{\gamma})^2\,(e^{-\gamma u}-1)^2$$

اگر جمله دوم رابطه بالا را با پتانسیل مورس[1] یک بعدی [۷]

$$V(x) = D(1-e^{\frac{-x}{a}})^2 \tag{۲۳}$$

با a و D ثابت، مقایسه کنیم پی می‌بریم که هامیلتونی جدید (۲۲) در واقع هامیلتونی پتانسیل مورس است و تنها کافی است که a و D را دوباره تعریف کنیم.

$$D = \frac{1}{2} m\frac{\omega^2}{\gamma^2} \qquad \text{و} \qquad a = \frac{1}{\gamma} \tag{۲۴}$$

ویژه مقادیر و توابع پتانسیل را می‌توان با استفاده از روش فاکتورگیری[2] بدست آورد [۷].

در معادله ویژه مقداری پتانسیل مورس

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + D\,(1-e^{\frac{-x}{a}})^2\right]u(x) = Eu(x) \tag{۲۵}$$

با استفاده از این روش فاکتورگیری، ویژه مقادیر انرژی E_n پتانسیل مورس به صورت زیر است:

$$E_n = 2\sqrt{\frac{\hbar^2 D}{2ma^2}}(n+\frac{1}{2}) - \frac{\hbar^2}{2ma^2}(n+\frac{1}{2})^2 \tag{۲۶}$$

بنابراین هرگاه معادله ویژه مقداری هامیلتونی تغییر یافته (۲۲) را بنویسیم، با در نظر گرفتن تعریف (۲۴)، ویژه مقادیر انرژی را با استفاده از (۲۶) می‌توان بدست آورد:

$$E_n' = \hbar\omega(n+\frac{1}{2}) - \frac{\hbar^2\gamma^2}{2m}(n+\frac{1}{2})^2 \tag{۲۷}$$

---

[1] Morse potential

[2] Factorization method

در حدی که γ به سمت صفر میل می کند دوباره به ویژه مقادیر انرژی نوسانگر هماهنگ می‌رسیم. به این ترتیب برای پتانسیل مورس می‌توان تعبیر جدیدی ارائه نمود. به این معنا که پتانسیل مورس را به عنوان پتانسیل نوسانگر هماهنگ کمینه تکانه با جبرجابجایی تعمیم یافته (۱۲) در نظر گرفت.

٦. پتانسیل اتم هیدروژن گونه یک‌بعدی

پتانسیل اتم هیدروژن گونه یک بعدی به صورت زیر

$$V(x)=\frac{-A}{x}+\frac{B}{x^2}+D \qquad x>0 \tag{۲۸}$$
$$V(x)=\infty \qquad x\le 0$$

تعریف می‌شود. که در آن A ،B ثابت‌های مثبت هستند. معادله ویژه مقداری این پتانسیل حل دقیق دارد. در واقع می‌توان با روش فاکتورگیری ویژه توابع و ویژه مقادیر انرژی این پتانسیل را نیز بدست آورد [۷]. ویژه مقادیر انرژی چنین است:

$$E_n=\frac{-\dfrac{mA^2}{2\hbar^2}}{\left[\sqrt{\dfrac{2m\mathrm{B}}{\hbar^2}+\dfrac{1}{4}}+(n+\dfrac{1}{2})\right]^2}+D \tag{۲۹}$$

که m جرم ذره است که در معادله شرودینگر ظاهر می‌شود. بار دیگر جبر تعمیم یافته (۱۲) را در نظر می گیریم و تبدیلات (۱۶) و (۱۷) را بر هامیلتونی این پتانسیل اعمال می کنیم.

$$\hat{H}=\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{du^2}+\left\{\frac{-A\gamma}{e^{\gamma u}-1}+\frac{\mathrm{B}\gamma^2}{\left(e^{\gamma u}-1\right)^2}+D\right\} \tag{۳۰}$$

برای رسیدن به عبارت فوق برای $\hat{\mathrm{H}}$، x به صورت زیر به u تبدیل شده است

$$(1+\gamma x)\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial u} \tag{۳۱}$$

و

$$x=\frac{1}{\gamma}(e^{\gamma u}-1)$$

ثابت‌های A ،B ،D اختیاری می‌باشند. در ادامه این ثابت‌ها رابه دو شکل مختلف انتخاب می کنیم و در هر مورد نشان می‌دهیم که عبارت داخل کروشه رابطه (۳۰) تبدیل به یک پتانسیل معروف می‌شود.

الف) اگر برای ثابت D قرار دهیم:

$$D=\frac{-1}{2}\left(A\gamma+\mathrm{B}\gamma^2\right) \tag{۳۲}$$

در این صورت هامیلتونی (۳۰) چنین خواهد شد:

$$\hat{H}=\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{du^2}+\left\{\frac{-A\gamma}{e^{\gamma u}-1}+\frac{\mathrm{B}\gamma^2}{(e^{\gamma u}-1)^2}-\frac{\mathrm{A}\gamma+\mathrm{B}\gamma^2}{2}\right\} \tag{۳۳}$$

پس از یک محاسبه معمولی داریم:

$$\hat{H}=\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{du^2}+\left\{\frac{B\gamma^2}{4\sinh^2\frac{\gamma u}{2}}-\frac{1}{2}\left(A\gamma+B\gamma^2\right)\coth\frac{\gamma u}{2}\right\} \tag{۳۴}$$

اگر قرار دهیم $\frac{\gamma u}{2}=z$ آنگاه معادله ویژه مقداری زیر را برای این هامیلتونی می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{-d^2}{dz^2}+\frac{2mB}{\hbar^2\sinh^2 z}-\frac{4m\left(A\gamma+B\gamma^2\right)}{\gamma^2\hbar^2}\coth z\right)u(z)=\frac{8m}{\hbar^2\gamma^2}Eu(z) \tag{۳۵}$$

با تعریف ثابت‌های بدون بعد m'، ν و ε به صورت

$$\frac{2mB}{\hbar^2}=m'(m'+1) \qquad \frac{4m(A\gamma+B\gamma^2)}{\gamma^2\hbar^2}=2\nu \tag{۳۶}$$

$$\varepsilon=\frac{8m}{(\gamma\hbar)^2}E$$

معادله ویژه مقداری بدون بعد خواهد شد:

$$(-\frac{d^2}{dz^2}+\frac{m'(m'+1)}{\sinh^2 z}-2\nu\coth z)u(z)=\varepsilon u(z) \tag{۳۷}$$

این معادله دقیقا معادله ویژه مقداری پتانسیل مانینگ – روزن[1] [۸،۷] می‌باشد. ویژه مقادیر برای این پتانسیل عبارتند از:

$$\varepsilon_n=\left(\sqrt{\frac{2mB}{\hbar^2}+\frac{1}{4}}+(n+\frac{1}{2})\right)^2-\frac{\nu^2}{\left(\sqrt{(\frac{2mB}{\hbar^2}+\frac{1}{4}}+(n+\frac{1}{2})\right)^2} \tag{۳۸}$$

بنابراین:

$$E_n=\frac{\hbar^2\gamma^2}{8m}\left(\sqrt{\frac{2mB}{\hbar^2}+\frac{1}{4}}+(n+\frac{1}{2})\right)^2-\frac{\hbar^2\gamma^2\nu^2}{8m\left(\sqrt{\frac{2mB}{\hbar^2}+\frac{1}{4}}+(n+\frac{1}{2})\right)^2} \tag{۳۹}$$

E_n ویژه مقادیر انرژی هامیلتونی تغییر یافته (۳۴) می‌باشد. اگر تعریفی که برای D در نظر گرفتیم را دوباره در (۲۹) جایگذاری کنیم، درحدی که γ به سمت صفر میل می کند دوباره به ویژه مقادیر انرژی پتانسیل اتم هیدروژن گونه یک‌بعدی خواهیم رسید.

---

[1] maning-rosen

ب) ثابت‌های D، B، A را طور دیگری انتخاب می کنیم:

$$A=\frac{2q}{\gamma} \quad , \quad B=\frac{q^2}{\gamma^2} \quad , \quad \mathrm{D}=1 \tag{۴۰}$$

هامیلتونی (۳۰) با این انتخاب با رابطه زیر داده می‌شود:

$$H=\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{du^2}+\{\frac{-2q}{(e^{\gamma u}-1)}+\frac{q^2}{(e^{\gamma u}-1)^2}+1\}=\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{du^2}+(1-\frac{q}{e^{\gamma u}-1})^2 \tag{۴۱}$$

جمله $(1-\frac{q}{e^{\gamma u}-1})^2$ پتانسیل مورس تعمیم یافته نامیده می‌شود. معادله ویژه مقداری این پتانسیل را می‌توان پس از بدون بعدسازی با یک تبدیل مناسب به یک معادله ابرهندسی تبدیل کرد و سپس با حل این معادله ویژه مقادیر و ویژه توابع را بدست می‌آورد [۹].

$$E_n'=1-\frac{\gamma^2\hbar^2}{8m}\left\{n+l-\frac{q(q+2)k}{n+l}\right\}^2 \tag{۴۲}$$

$$l=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+\frac{8q^2m}{\gamma^2\hbar^2}}) \qquad , \qquad k=\frac{2m}{\gamma^2\hbar^2}$$

که E_n' ویژه مقادیر انرژی هامیلتونی (۴۱) می‌باشند. دوباره مشاهده می کنیم که در حد $\gamma\to 0$ به ویژه مقادیر انرژی اتم هیدروژن گونه می‌رسیم. پس با این انتخاب جدید از ثابت‌های D، B، A پتانسیل مورس تعمیم یافته تعبیر دیگری به عنوان پتانسیل اتم هیدروژن گونه کمینه تکانه پیدا می کند.

۷. نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی

برای حل مسئله نوسانگر سه‌بعدی به صورتی که بر پایه جبر کمینه تکانه (۹) باشد، تنها کافی است که عملگر $\vec{p}$ را به صورت زیر تغییر دهیم:

$$\vec{p}=\frac{\hbar}{i}(1+\gamma r^2)\vec{\nabla} \tag{۴۳}$$

با اعمال این تبدیل بر هامیلتونی نوسانگر، هامیلتونی به دو جز H_0 و H_1 تبدیل می‌شود:

$$H=H_0+H_1 \tag{۴۴}$$

$$H_0=\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2+\frac{1}{2}m\omega^2r^2$$

$$H_1=\frac{-\gamma\hbar^2}{m}\left[r^2\nabla^2+r\frac{d}{dr}\right]$$

H_0 هامیلتونی نوسانگر هماهنگ در مکانیک کوانتومی عادی می‌باشد. باید توجه داشت که γ یک

ضریب ثابت بسیار کوچک است. بنابراین می‌توان گفت که مساله نوسانگر کمینه تکانه همان مساله نوســانگر عادی اســت که یک جمله اختلالی به آن اضافه شده است. پس می‌توان مساله را به روش اختلالی حل نمود و جابجایی انرژی را به صورت $E_{n,l}+\Delta_{n,l}$ در نظر گرفت که $\Delta_{n,l}$ به صورت:

$$\Delta_{n,l}=\langle n,l\,|\,H_1\,|\,n,l\rangle=-\frac{\gamma\hbar^2}{m}\left\langle n,l\,|\,r^2\nabla^2+r\frac{d}{dr}\,|\,n,l\right\rangle \qquad (۴۵)$$

به دست می‌آید. برای محاسبه جمله اول با استفاده از $H_0=\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2+\frac{1}{2}m\omega^2r^2$ داریم:

$$\frac{-\gamma\hbar^2}{m}\langle n,l\,|\,r^2\nabla^2\,|\,n,l\rangle=-\gamma m\omega^2\langle n,l\,|\,r^4\,|\,n,l\rangle+2\gamma E_n\langle n,l\,|\,r^2\,|\,n,l\rangle \qquad (۴۶)$$

در رابطه بالا $E_{n,l}=\hbar\omega(n+l+\frac{3}{2})$ انرژی نوسانگر سه‌بعدی است و ویژه توابع نوسانگر هماهنگ سه‌بعدی به صورت:

$$\psi_{n,l,m}(r,\theta,\phi)=\lambda^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{2n!}{(n+l+\frac{1}{2})\,!}}\,(\lambda r)^l e^{-(\lambda r)^2/2}L_n^{l+\frac{1}{2}}\left((\lambda r)^2\right)Y_l^m(\theta,\phi) \qquad (۴۷)$$

می‌باشــد که در آن $\lambda=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ و $L_n^{l+\frac{1}{2}}$ چندجمله‌ای لژاندر می‌باشــد. مقادیر چشمداشــتی r^2 را می‌توان با اســتفاده از قضیه ویریال به دســت آورد. با فرض اینکه پتانسیل کروی $V(r)$ متناسب با r^2 است، با استفاده از این قضیه داریم:

$$\langle n,l,m\,|\,V(r)\,|\,n,l,m\rangle=\frac{1}{2}E_{n,l}\Rightarrow\langle r^2\rangle=\frac{1}{m\omega^2}E_{n,l}=\frac{\hbar}{m\omega}(n+l+\frac{3}{2}) \qquad (۴۸)$$

برای به دست آوردن مقدار چشمداشتی r^4 که در رابطه (۴۶) ظاهر شده است، یعنی پس از جایگذاری ویژه توابع (۴۷) و انتگرال گیری روی قسمت زاویه‌ای، قرار می‌دهیم $\chi=(\lambda r)^2$ آنگاه انتگرال فضایی با استفاده از رابطه تعامد توابع لژاندر

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{s+k}L_n^s(x)dx=\frac{(n+s)!}{n!}\,(2n+s+1)^k\,\delta_{n,m} \qquad (۴۹)$$

به راحتی قابل محاسبه می‌باشد. در نهایت (۴۶) به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$-\frac{\gamma\hbar^2}{m}\langle n,l\,|\,r^2\nabla^2\,|\,n,l\rangle=\frac{\gamma\hbar^2}{m}(2n+l+\frac{3}{2})^2 \qquad (۵۰)$$

برای محاسبه جمله دوم رابطه (۴۶) باید از قسمت شعاعی ویژه توابع $\psi_{n,l,m}$ نسبت به r مشتق گرفت.

اگر $R_{n,l}$ را به عنوان قسمت شعاعی $\psi_{n,l,m}$ به صورت زیر تعریف کنیم:

$$R_{n,l}(r)=\lambda^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{2n!}{(n+l+\frac{1}{2})!}}(\lambda r)^{l}e^{\frac{-(\lambda r)^2}{2}}L_{n}^{l+\frac{1}{2}}((\lambda r)^2) \quad (۵۱)$$

آنگاه با استفاده از رابطه بازگشتی

$$x\frac{d}{dx}L_{n}^{k}(x)=nL_{n}^{k}(x)-(n+k)L_{n-1}^{k}(x) \quad (۵۲)$$

می‌توان مشتق تابع لاگر را نسبت به r حساب نمود. چون در نهایت باید از این عبارت مقدار چشمداشتی بگیریم بنابراین جمله L_{n-1}^{k} را به علت تعامد کنار می‌گذاریم و مشتق‌گیری به صورت زیر ساده می‌شود:

$$r\frac{d}{dr}R_{n.l}(r)=lR_{n,l}(r)-r\lambda^2R_{n,l}(r)+2nR_{n,l}(r) \quad (۵۳)$$

بالاخره برای جملهٔ دوم رابطه (۴۶) با استفاده از رابطه تعامد داریم:

$$\frac{-\gamma\hbar^2}{m}\left\langle n,l\,|\,r\frac{d}{dr}\,|\,n,l\right\rangle=\frac{-\gamma\hbar^2}{m}(2n+l-\lambda^2\langle r\rangle)=\frac{-\gamma\hbar^2}{m}(2n+l-\sqrt{2n+l+\frac{3}{2}}) \quad (۵۴)$$

پس $\Delta_{n,l}$ و در نتیجه جابجایی تراز انرژی E_n بدین صورت پیدا می‌شود:

$$E'_{n,l}=E_n+\Delta_{n,l}=\hbar\omega(n+l+\frac{3}{2})+\frac{(\Delta p_0)^2}{m}\left[(2n+l+\frac{3}{2})^2-l-2n+\sqrt{2n+l+\frac{3}{2}}\right] \quad (۵۵)$$

در این رابطه $(\Delta p_0)^2=\gamma\hbar^2$ می‌باشد.

۸. اتم هیدروژن

بـا اعمال تبدیـل (۴۳) بر هامیلتونی اتم هیدروژن، هامیلتونی به دو جز H_0 و H_1 تبدیل می‌شـود. H_0 هامیلتونی اتم هیدروژن در حالت عادی و H_1 یک جمله اختلالی است. تنها تفاوت این مساله با مساله قبل در ویژه توابع و شکل پتانسیل می‌باشد. در اینجا نیز برای به دست آوردن ترازهای انرژی جابجا شـده باید مقدار چشمداشـتی H_1 را حساب نماییم. با انجام عملیات مشابه با نوسانگر هماهنگ ویژه مقادیر انرژی را تا مرتبه اول اختلال حساب می‌کنیم، که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$E'_{n,l}=E_n+\Delta_{n,l}=\frac{-m\alpha^2}{2n^2}+\frac{(\Delta p_0)}{2m}\left[(n+l)^2+l(l+1)-\frac{l(l+1)}{n}\right] \quad (۵۶)$$

α ثابت ساختار ریز و m جرم الکترون می‌باشد. در اینجا همانطور که مشاهده می‌شود تبهگنی کاهش پیدا می‌کند. طیف اتم هیدروژن با دقت بالایی اندازه‌گیری شده است. این دقت بالا به ما این امکان را

می‌دهد که بتوانیم روی انحراف‌های بسیار کوچک حد بگذاریم. در اینجا طیف با جمله‌ای متناسب با Δp_0 تصحیح شـــده اســـت. با در نظر گرفتن اختلاف انرژی اندازه‌گیری شده برای دو تراز مختلف می‌توان روی Δp_0 یا γ حد گذاشت. مسلماً انتظار داریم این حد بسیار کوچک باشد.

۹. اثر آهارونوف-بوهم

اثرآهارونـــوف-بوهم (AB)[۱۰]نشـــان‌دهنده اثرات فیزیکی بر روی ذرات بارداری اســـت که مقید به حرکت در ناحیه‌ای بدون میدان الکترومغناطیســـی هســـتند. در الکترودینامیک کلاســـیک نیروی لورنتس تنها عامل موثر بر ذره باردار اســـت. این عمل به صورت یک کنش موضعی از طریق میدان الکترومغناطیسی صورت می‌گیرد. مفهوم پتانســـیل نیز تنها برای ساده کردن وارد می‌شود. برای یک میدان واحد می‌توان پتانســـیل‌های متفاوتی در نظر گرفت که همگی به نتایج فیزیکی یکسانی منتهی می‌شوند. اما در مکانیک کوانتومی در معادله شرودینگر تنها پتانسیل الکترومغناطیسی $A_\mu = (\phi, \vec{A})$ به طور صریح وارد می‌شود. بنا بر پیشنهاد آهارونوف-بوهم اهمیت پتانسیل در مکانیک کوانتومی بسیار بیشتر از مکانیک کلاسیک است و به عبارت دیگر پتانسیل کمیتی بنیادی در مکانیک کوانتومی است.
هامیلتونی در حضور میدان الکترومغناطیسی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\phi \tag{۵۷}$$

معادلات الکترومغناطیسی تحت تبدیل

$$A_\mu \to A'_\mu + \partial_\mu \Lambda \tag{۵۸}$$

ناوردا می‌باشد. معادله شرودینگر در حضور پتانسیل A'_μ عبارت است از:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A}'\right)^2 + e\phi'\right]\psi' = i\hbar\frac{\partial \psi'}{\partial t} \tag{۵۹}$$

در معادله فوق با به کار بردن تبدیل

$$\psi' = \exp\left(\frac{ie\Lambda}{\hbar c}\right)\psi \tag{۶۰}$$

دوباره به معادله شـــرودینگر در حضور پتانســـیل A'_μ می‌رســـیم. تبدیلات (۵۸) و (۶۰) را که معادله شـــروینگرتحت آنها ناورداســـت، تبدیلات پیمانه‌ای می‌نامند. تمام مشاهده پذیرهای فیزیکی تحت این تبدیلات تغییرناپذیرند. بنا به نظر آهارونوف و بوهم با اینکه مکانیک کوانتومی تحت تبدیلات پیمانه‌ای تغییرناپذیر است اما پتانسیل A_μ دارای اهمیت فیزیکی است. اگر ψ جواب معادله شرودینگر در یک ناحیه بدون میدان باشد و پتانسیل الکتریکی را صفر در نظر بگیریم (ϕ=0)، بنابراین جواب این معادله در حضور میدان به صورت

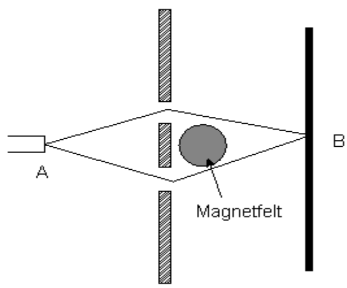
$$\psi' = \psi \exp(-iS) \tag{۶۱}$$

تغییر می‌یابد.

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)^2\right]\psi'=ih\frac{\partial\psi'}{\partial t} \quad , \quad \psi'\to e^{-iS}\psi \tag{۶۲}$$

$$S=\frac{e}{\hbar c}\int\vec{A}.d\vec{l} \;\Rightarrow \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\right)^2\psi=i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

S یک انتگرال خطی است که از نقطه ثابت A تا نقطه B گرفته شده است. آهارونوف و بوهم تاکید کردند که عامل فاز $\exp(-is)$ می‌تواند به نتایج فیزیکی منجر شود. در شکل زیر آزمایش پیشنهادی آنها دیده می‌شود. یک باریکه الکترون به دو قسمت تجزیه شده و هر کدام از باریکه‌ها از یک طرف سیملوله حامل میدان مغناطیسی عبور می کند و سپس در نقطه B به هم می‌رسند. شکل (۱-۹).



شکل (۱-۹)

اگر در عدم حضور میدان $\psi_I^{(0)}$ و $\psi_{II}^{(0)}$ توابع موج برای مسیر بالایی و پایینی باشند در حضور میدان توابع موج در نقطه B به صورت $\psi_I^{(0)}\,e^{-iS_I}$ و $\psi_{II}^{(0)}\,e^{-iS_{II}}$ بیان می‌شوند. فازهای S_I و S_{II} عبارتند از:

$$S_I=\frac{e}{\hbar c}\int_I\vec{A}.d\vec{l} \tag{۶۳}$$

$$S_{II}=\frac{e}{\hbar c}\int_{II}\vec{A}.d\vec{l}$$

مسیر دلخواه (II) از بالای استوانه و مسیر دلخواه (I) از پایین آن عبور می کند. هنگام تداخل این دو پرتو در نقطه P تابع موج برابر مجموع ψ_I و ψ_{II} است.

$$\psi=\psi_I^{(0)}\,e^{-iS_I}+\psi_{II}^{(0)}\,e^{-iS_{II}} \tag{۶۴}$$

احتمال حضور الکترون در نقطه B عبارت است از:

$$\psi^*\psi=\left|\psi_I^{(0)}\right|^2+\left|\psi_{II}^{(0)}\right|^2+\psi_I^{(0)*}\psi_{II}^{(0)}\,e^{i(S_{\rm I}-S_{\rm II})}+\psi_I^{(0)}\psi_{II}^{(0)^*}\,e^{-i(S_{\rm I}-S_{\rm II})} \tag{۶۵}$$

این نتیجه به اختلاف فاز S_I-S_{II} بستگی دارد.

$$\varphi^{(0)}{}_{AB}=S_I-S_{II}=\frac{e}{\hbar c}\int_I\vec{A}.d\vec{l}-\frac{e}{\hbar c}\int_{II}\vec{A}.d\vec{l}=\frac{e}{\hbar c}\oint\vec{A}.d\vec{l}=\frac{e}{\hbar c}\int\vec{B}.d\vec{S}=\frac{e}{\hbar c}\Phi \tag{۶۶}$$

در این رابطه Φ شاری است که از سطح مقطع استوانه عبور می کند.
در اینجا به حل مسئله آهارونوف-بوهم با جبر کمینه تکانه [۱۱] میپردازیم.

۱۰. اثر آهارونوف-بوهم کمینه تکانه

برای کمینه تکانه کردن مسئله AB مشابه با دو مسئله قبل تبدیلات (۴۳) را بر هامیلتونی اعمال می کنیم و مسئله جدید را به صورت یک مسئله مکانیک کوانتومی عادی حل می کنیم [۱۲،۱۳،۱۴،۱۵]. با اعمال این تبدیلات برای معادله شرودینگر داریم:

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\hbar}{i}(1+\gamma r^2)\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{e}{c}A_i\right)\left(\frac{\hbar}{i}(1+\gamma r^2)\frac{\partial}{\partial x_i}-\frac{e}{c}A_i\right)\right]\psi=i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{۶۷}$$

تبدیل پیمانهای به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\psi'\to e^{i\Lambda}\psi \tag{۶۸}$$

فرض می کنیم ψ جواب معادله شرودینگر کمینه تکانه در یک ناحیه بدون میدان و ψ' جواب این معادله در حضور میدان باشد. بنابراین مشابه با عملیات انجام شده در قسمت قبل برای حذف اثر میدان، Λ را به صورت زیر انتخاب می کنیم.

$$\hbar(1+\gamma r^2)\frac{\partial}{\partial x_i}\Lambda=\frac{e}{c}A_i \tag{۶۹}$$

$$\vec{\nabla}\Lambda=\frac{e}{\hbar c}\frac{1}{1+\gamma r^2}\vec{A}$$

پس از بسط مخرج تا مرتبه اول γ معادله به دست آمده به راحتی قابل حل است.

$$\vec{\nabla}\Lambda=\frac{e}{\hbar c}(1-\gamma r^2+.....)\vec{A} \tag{۷۰}$$

$$S=\frac{e}{\hbar c}\left(\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{A}.d\vec{l}-\gamma\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}r^2\vec{A}.d\vec{l}\right)$$

که برای یک مسیر بسته، فازی به صورت زیر نتیجه میدهد.

$$\varphi_{AB}=\varphi_{AB}^{(0)}+\varphi_{AB}^{(1)}=\frac{e}{\hbar c}\int\vec{B}.d\vec{s}-\frac{e}{\hbar c}\gamma\oint r^2\vec{A}.d\vec{l}=\frac{e}{\hbar c}\Phi-\frac{e}{\hbar c}\gamma\int_S\left(\vec{\nabla}\times(r^2\vec{A})\right).\hat{n}\,ds \tag{۷۱}$$

همانطور که مشاهده میشود، فاز AB یک تصحیح از مرتبه γ پیدا می کند. برای محاسبه قسمت تصحیحی فرض می کنیم $\hat{n}$ برداری که عمود بر صفحه و در جهت محور z میباشد. شعاع سیملوله را نیز a در نظر می گیریم. در ناحیه داخل سیملوله میدان غیر صفر و ثابت B با پتانسیل برداری

$$\vec{A}_{in}=\frac{B}{2}(-y,x,0) \tag{۷۲}$$

داریم. در ناحیه خارج از سیملوله میدان صفر است اما پتانسیل برداری غیر صفر و به صورت زیر است:

$$\vec{A}_{out} = \frac{B}{2}\frac{a^2}{x^2+y^2}(-y,x,0) \tag{۷۳}$$

انتگرال سطحی ظاهر شده در (۷۱) را برای دو ناحیه بیرون و داخل سیملوله حساب می کنیم.

$$\begin{aligned}\int_S (\vec{\nabla}\times(r^2\vec{A})).\hat{n}ds &= 2\int_S (\vec{r}\times\vec{A}).\hat{n}ds + \int_S r^2(\vec{\nabla}\times\vec{A}).\hat{n}ds \\ &= 2\int_{S_{in}} (\vec{r}\times\vec{A}).\hat{n}ds + \int_{S_{in}} r^2(\vec{\nabla}\times\vec{A}).\hat{n}ds + 2\int_{S_{out}} (\vec{r}\times\vec{A}).\hat{n}ds \int_{S_{out}} r^2(\vec{\nabla}\times\vec{A}).\hat{n}ds\end{aligned} \tag{۷۴}$$

که S_{out} و S_{in} نشان‌دهنده سطح خارجی و داخلی سیملوله می‌باشند.
با استفاده از (۷۲) و (۷۳) در انتگرالهای به دست آمده داریم:

$$\int_S (\vec{\nabla}\times(r^2\vec{A})).\hat{n}ds = 2B\int_{S_{in}} r^2 ds + Ba^2 S_{out} \tag{۷۵}$$

بنابراین

$$\varphi_{AB} = \frac{e}{\hbar c}\Phi\left[1-\gamma\frac{S_{out}}{\pi}-\gamma\frac{2}{\pi a^2}\int_{S_{in}} r^2 ds\right] \tag{۷۶}$$

اگر شعاع سیملوله را بسیار کوچک فرض کنیم می‌توان از انتگرال آخر چشم‌پوشی کرد.

$$\begin{aligned}&\mathrm{S_{out}} \approx \mathrm{S} \\ &\varphi_{AB} = \frac{e}{\hbar c}\Phi\left[1-\gamma\frac{S}{\pi}\right]\end{aligned} \tag{۷۷}$$

S مســاحت کل ناحیه‌ای است که توسط مسیر بسته جاروب می‌شــود. بنابراین ممکن است بتوان با ترتیب دادنآزمایشی که الکترونها روی مسیر بزرگی حرکت کنند، رابطه (۷۷) را تحقیق کرد.
در تصحیح تا مرتبه اول، فاز به مســیر و ســطحی که جاروب می کند وابسته می‌شود. به همین علت خاصیت توپولوژیکی اثر آهارونوف-بوهم از بین می‌رود. بررســی اثر AB در فضای ناجابجایی نیز به نتیجه‌ای مشــابه منجر شده اســت [۱۱]. می‌توان با استفاده از نتایج آزمایش‌های انجام شده بر روی این اثر، حدی روی پارامتر کمینه تکانه γ پیدا کرد. همچنین می‌توان پتانسیل برداری را به صورتهای دیگری نیز وارد معادله شــرودینگر (۶۷) نمود که تفاوت آنها، در به وجود آمدن نیروهای لورنتس متفاوت وابسته به پارامتر γ است. در حد γ به سمت صفر تمام آنها به یک مقدار میل می کنند. وابسته شدن فاز در اثر آهارونوف-بوهم به سطح جاروب شده توسط ذره بسیار جالب توجه است و امکان آشکارسازی چنین اثراتی با انتخاب سطوح بسیار بزرگ دور از ذهن نیست.

نتیجه‌گیری

در این مقاله چند مسئله حل‌پذیر در مکانیک کوانتومی با استفاده از روابط جبر جابجایی تعمیم یافته (۹) و (۱۲) مورد بررسی قرار گرفت و ارتباطات جالبی بین پتانسیل‌های حل‌پذیر بدست آمد. از جمله ارتباط بین پتانسیل نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی و پتانسیل مورس و ارتباط بین پتانسیل اتم هیدروژن گونه یک‌بعدی با پتانسیل مانینگ-روزن سپس به بررسی اثر آهارانوف-بوهم پرداختیم ونتایج جدیدی را برای اختلاف فاز موجود در این نظریه با فرض کمینه تکانه بدست آوردیم.

همانطور که انتظار می‌رفت در این حالت خاصیت ناوردایی توپولوژیکی فاز از بین می‌رود. یک مسئله جالب دیگر تعمیم و محاسبه فاز آهارونوف کاشر با فرض کمینه تکانه می‌باشد که در کارهای بعدی به آن خواهیم پرداخت.

References

[1] A. Kempf, "Quantum field theory with nonzero minimal uncertainties in position and momenta", hep-th/9405067

[2] A. Kempf, "On Path Integration on Noncommutative Geometries", hepth/9603115

[3] A. Kempf, Phys. Rev. D. 52 (1995) 1108-1118.

[4] B. Mirza, M. Zarei, Phys. Rev. D 79; (2009) 125007.

[5] P. Kussk, J. Ord. ,"Kinematics and uncertainty relations of a quantum test particle in a curved space-time", Phys. lett. B, Vol. 421, pp. 99-104,1998.

[6] B. Mirza, M. Dehghani, Iranian Journal of Physics Research, Vol 4, NO. 3, (2005) 275-285.

[7] K. T. Hecht, Quantum mechanics, Springer, 2000.

[8] L. Infeld, T. E. Hull,"The factorization method",Rev.Mod.Phys.,Vol. 23. no. 1, pp. 21-68, 1951.

[9] A. Del Sol Mesa, C. Quesne, Yu. F. Smirnov, "Generalized Morse Potential: Symmetry and Satellite Potentials", J. Phys. A, Vol. 31, pp. 321-335, 1997, Physics/9708004

[10] Y. Aharonov, D. Bohm, Phys. Rev. 115 (1959) 485.

[11] J. Gamboa, M. Loewe, J. C. Rojas , "Noncommutativity and the Aharonov-bohm Effect", hep-th/0101081

[12] H. Falomir, J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez, J. C. Rojan, Phys. Rev. D66 (2002) 045018.

[13] M. Chaichian, et. Al. Phys. Lett B527 (2002) 149-154.

[14] B. Mirza, M. Zarei, Eur. Phys. J. C32 (2004) 583-586.

[15] B. Mirza, R. Narimani, M. Zarei, Eur. Phys. J. C48 (2006) 641-645.