

A model for Dark Halo: Rotation Curve and Gravitational Lensing

F. Shojai¹; B. Bahrami Asl²

Received: 2015.12.9

Accepted: 2016.8.25

Abstract

In this paper a model with anisotropic pressures for dark matter halo is assumed. The corresponding metric matches the schwarzschild metric at the surface of halo. Then the energy conditions, rotation curve and gravitational lensing effect are investigated.

keywords: Dark matter hab, Rotation curve, Gravitational lensing

¹ Associate Professor of Physics, University of Tehran

² M. Sc. Student of Physics, University of Tehran

مدلی برای هاله تاریک: منحنی چرخش و همگرایی

فاطمه شجاعی^۱
بنفشه بهرامی اصل^۲

تاریخ دریافت: ۹۴/۹/۱۸

تاریخ تصویب: ۹۵/۶/۳

چکیده

در این مقاله مدلی برای هاله تاریک پیشنهاد می شود که دارای فشار ناهمسانگرد است و متریک نظیر آن در سطح هاله بر متریک شوارزشیلد منطبق است. سپس شرایط انرژی، منحنی چرخش و همگرایی نور برای هاله بررسی می شود.

واژه‌های کلیدی: هاله ماده تاریک، منحنی چرخشی، همگرایی

گرانشی

^۱ دانشیار فیزیک دانشگاه تهران

^۲ دانشجوی کارشناسی ارشد فیزیک دانشگاه تهران

۱. مقدمه

منحنی چرخش کهکشان‌های مارپیچ یکی از مهمترین نشانگرهای ماده تاریک در مقیاس کهکشانی هستند [1]. سرعت چرخش در نزدیکی‌های مرکز کهکشان افزایش می‌یابد تا در لبه‌های کهکشان به مقدار تقریباً ثابت، عمدتاً از مرتبه چند صد کیلومتر بر ثانیه مجانب شود. این رفتار معمولاً با فرض مقدار زیادی ماده تاریک، که در یک هاله کروی توزیع شده، توضیح داده می‌شود. البته میزان ماده تاریک در مرکز هاله (منطبق بر مرکز کهکشان) کم و در ناحیه خارجی هاله (منطبق بر اطراف کهکشان) زیاد است و در کل جرم هاله ماده تاریک در حدود ۹ تا ۱۵ برابر جرم مرئی کهکشان است. اگر ماده تاریک را به صورت سیال کامل با فشارهای همسانگرد در نظر بگیریم، اعمال شرط انرژی ضعیف و انطباق بر متریک شوارزشیلد در مرز هاله، به صفر بودن فشار برای ماده تاریک می‌انجامد [4,5]. بنابراین در کارهای متعدد [2,9,10] مؤلفه‌های فشار مماسی و شعاعی متفاوت انتخاب و انواع مختلف معادلات حالت ماده تاریک استخراج شده است. در مقاله حاضر با انتخاب مؤلفه شعاعی فشار به بررسی شرایط انرژی، منحنی چرخش و پدیده همگرایی گرانشی می‌پردازیم.

۲. متریک هاله

فرض کنید ماده تاریک کهکشان‌های مارپیچ درون یک هاله متقارن کروی استاتیکی به شعاع R غوطه ور شده است و فضا-زمان بیرون هاله توسط متریک شوارزشیلد^۱ و فضا-زمان هاله توسط متریک زیر توصیف می‌شود.

$$ds^2 = e^{2\Phi(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1)$$

که $\Phi(r)$ و $\lambda(r)$ دو تابع ناشناخته هستند.

در بخش‌های غیر مرئی کهکشان با کمک طیف ۲۱ سانتی‌متری ابرهای هیدروژن طبیعی می‌توان سرعت چرخش آن‌ها را به دست آورد. این ابرها مانند ذرات آزمون عمل

¹ $ds^2 = E \left(1 - \frac{2M}{R}\right) dt^2 - \frac{1}{E(1 - \frac{2M}{R})} dr^2 - r^2 d\Omega^2$

که E یک ثابت و M جرم شوارزشیلد است.

می کنند، که روی مدارهای دایروی پایدار [3] ($\dot{r} = \ddot{r} = 0$) حرکت می کنند. به علاوه مختصات را انتخاب می کنیم که در آن صفحه دیسک کلهکشانی در $\theta = 90$ قرار بگیرد. از آن جا که سرعت چرخش عبارت است از: $v^2 = r^2 e^{-2\Phi} \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ با کمک شرایط فوق:

$$\Phi = \frac{\beta_0}{2} + \frac{\alpha}{2} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \quad (2)$$

که β_0 ثابت انتگرال گیری و $\alpha = 2v_c^2$ ($C = 1$) پارامتر بدون بُعد و بسیار کوچک است، $10^{-6} < \alpha < 10^{-7}$. برای تعیین $\lambda(r)$ باید معادلات میدان اینشتین را حل کنیم. سه معادله میدان برای چهار مجهول $\lambda(r)$ و ρ و p_r و p_t داریم که به ترتیب چگالی انرژی، فشار مماسی و شعاعی شاره تاریک هستند. در [4] در کنار این معادلات، معادله حالت شاره که فشار (شعاعی یا مماسی) را به چگالی مربوط می کند، فرض شده است. از آن جا که سرعت چرخش در مقایسه با سرعت نور بسیار کوچک است و میدان گرانشی هاله ضعیف است بنابراین معادلات خطی اینشتین را به کار می بریم. این بدان معنی است که فقط جملات خطی بر حسب $\lambda(r)$ و v^2 را در معادلات منظور می کنیم. این معادلات عبارتند از ($4\pi G = 1$):

$$\frac{(r\lambda)}{r^2} = \rho \quad (3)$$

$$\frac{v_c^2 - \lambda}{r^2} = p_r \quad (4)$$

$$-\frac{\dot{\lambda}}{r} = 2p_T \quad (5)$$

که پریم مشتق بر حسب مختصه شعاعی را نشان می دهد. در کار حاضر فشار شعاعی را به صورت تابعی از شعاع کلهکشان به دو شکل زیر پیشنهاد می کنیم [11]:

$$a) p_r = \frac{p_0}{r^2} + \beta r^m \quad (6)$$

$$b) p_r = be^{\gamma \frac{r}{R}} + \frac{v_c^2}{r^2} \quad (7)$$

درواقع تابعیت فشار شعاعی بر حسب شعاع را به دو فرم کلی توانی و نمایی پیشنهاد می کنیم تا رفتار چگالی و انحنای نور حاصل از این انتخاب ها را بررسی و نتایج را تحلیل کنیم. در این روابط p_0 ، β ، b و γ و m ثابت هستند. مرز هاله $r = R$ بر مبنای صفر شدن مؤلفه شعاعی فشار تعریف می شود. بنابراین:

$$\beta = -p_0 R^{-(m+2)} \quad (8)$$

$$b = -\frac{v_E^2}{R^2} e^{-\gamma} \quad (۹)$$

از طرف دیگر روی این مرز برای تطبیق با شوارزشیلد لازم است $\lambda(R) = -\phi(R)$ باشد. بنابراین با کمک معادله (۴) داریم: $B_0 = -\alpha$. بنابراین تابع $\phi(r)$ مشخص می‌شود:

$$\phi(r) = \frac{\alpha}{2} (\ln \frac{r}{R} - 1) \quad (۱۰)$$

به علاوه می‌دانیم:

$$e^{\phi(R)} = E(1 - \frac{2M}{R}) \quad (۱۱)$$

در نتیجه

$$E = \frac{e^{-\alpha}}{(1 - \frac{2M}{R})} \quad (۱۲)$$

با صفر قرار دادن چگالی روی مرز دیگر پارامترهای مدل مشخص می‌شوند:

$$p_0 = -\frac{\alpha}{2(m+2)} \quad (۱۳)$$

$$\gamma = -3 \quad (۱۴)$$

حال با کمک معادلات (۳) و (۴) چگالی، فشار مماسی و $\lambda(r)$ به دست می‌آیند. برای

مدل a :

$$p_r = \frac{\alpha}{2(2+m)r^2} \left[\left(\frac{r}{R} \right)^{m+2} - 1 \right] \quad (۱۵)$$

$$\rho = -\frac{\alpha(m+3)}{2(m+2)r^2} \left[\left(\frac{r}{R} \right)^{m+2} - 1 \right] \quad (۱۶)$$

$$\lambda(r) = -\frac{\alpha}{2(2+m)} \left[\left(\frac{r}{R} \right)^{m+2} - 1 \right] + \frac{\alpha}{2} \quad (۱۷)$$

$$p_t = -\frac{\alpha}{2r} \left(\frac{r}{R} \right)^{m+2} \quad (۱۸)$$

و برای مدل b :

$$p_r = -\frac{\alpha}{2R^2} \left(e^{3-3\frac{r}{R}} - \frac{R^2}{r^2} \right) \quad (۱۹)$$

$$\rho = \frac{\alpha}{2R^2} e^{3-3\frac{r}{R}} \left(3 - 3\frac{r}{R} \right) \quad (۲۰)$$

$$\lambda(r) = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 e^{3-3\frac{r}{R}} \quad (۲۱)$$

$$p_t = -\frac{\alpha}{4R^2} e^{3-3\frac{r}{R}} \left(2 - 3\frac{r}{R} \right) \quad (۲۲)$$

برای یافتن معادله حالت با کمک سه معادله (۱۵)، (۱۶) و (۱۸) برای مدل a داریم:

$$\omega_t = -\frac{(m+2)r}{(m+3)} \left(\frac{r}{R}\right)^{m+2} \left(\frac{r}{R}\right)^{m+2-1} \quad (23)$$

$$\omega_r = -(m+3) \quad (24)$$

و با کمک سه معادله (۱۹)، (۲۰) و (۲۲) برای مدل b داریم:

$$\omega_t = -\frac{1}{2} \left(\frac{2-3\frac{r}{R}}{3-3\frac{r}{R}}\right) \quad (25)$$

$$\omega_r = -\frac{1}{3-3\frac{r}{R}} + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \left(\frac{e^{3-3\frac{r}{R}}}{3-3\frac{r}{R}}\right) \quad (26)$$

البته مفهوم دیگری به نام چگالی مؤثر نیز وجود دارد که در واقع چگالی اثر کننده در

منحنی چرخش را نشان می دهد [6,7]:

$$\rho_{eff} = \rho + p_r + 2p_t \quad (27)$$

قابل ذکر است که به کمک معادلات میدان (۳) تا (۵) می بینیم که چگالی مؤثر مستقل

از مقدار λ و برابر است با:

$$\rho_{eff} = \frac{v_c^2}{r^2}$$

۳. شرایط انرژی

حال می توان شرایط انرژی را برای نتایج به دست آمده بررسی کرد و با کمک پارامترهای

موجود در روابط، محدوده مجاز برای تحقیق شرایط انرژی را به دست آورد. لازم به ذکر

است که شرایط انرژی عبارتند از [8]:

جدول ۱: شرایط انرژی

شرط انرژی ضعیف WEC ^۱	$\rho \geq 0$ $\rho + p_r > 0$ $\rho + p_t > 0$
شرط انرژی نورگونه NEC ^۲	$\rho \geq 0$ $\rho + p_r \geq 0$ $\rho + p_t \geq 0$
شرط انرژی قوی SEC ^۳	$\rho + p_r \geq 0$ $\rho + p_t \geq 0$ $\rho + p_r + 2p_t \geq 0$
شرط دامنه انرژی DEC ^۱	$\rho \geq p_r ; \rho \geq p_t $

^۱ Weak Energy Condition

^۲ Null Energy Condition

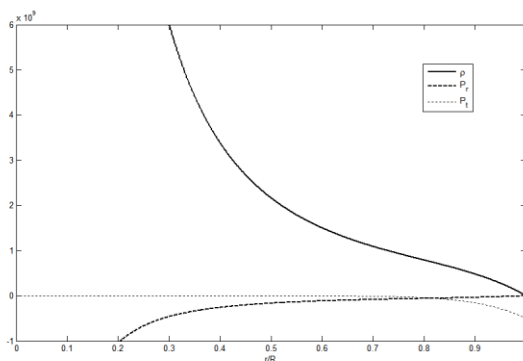
^۳ Strong Energy Condition

این شرایط برای دو حالت پیشنهادی بررسی شده و محدودهٔ مجاز پارامترها برای برقراری آن‌ها در جدول زیر نمایش داده شده است:

جدول ۲: محدودهٔ پارامترهای مدل برای هر کدام از شرایط انرژی

	A	B
WEC	$m \geq -3$	همواره
NEC	$m \geq -3$	همواره
SEC	$m > -4$	همواره
DEC	$m \geq -4$	همواره

با مشخص شدن محدودهٔ پارامترهای موجود در روابط، نمودار چگالی انرژی، فشار شعاعی و مماسی بر حسب $\frac{r}{R}$ (شعاع تا مرکز کهکشان/شعاع شوارزشیلد) برای مدل a در شکل (۱) و برای مدل b در شکل (۲) و (۳) رسم شده است:

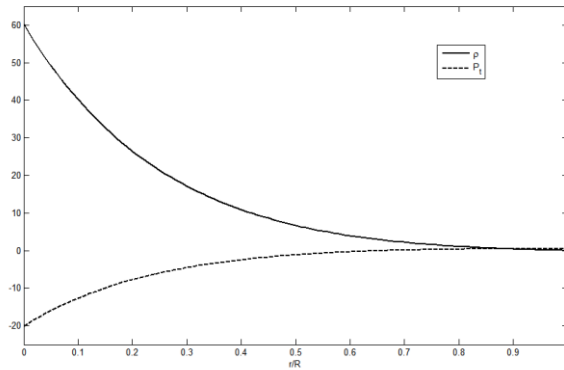


شکل ۱: منحنی خط سیاه (منحنی بالایی) و منحنی خط چین (منحنی پایینی) و منحنی نقطه چین (منحنی وسط) به ترتیب معرف چگالی انرژی، فشار شعاعی و فشار مماسی برای مدل a هستند. $m = 10$ اختیار شده است.

در شکل ۱ دیده می‌شود که چگالی انرژی همواره مثبت و با افزایش شعاع کاهش می‌یابد تا این که روی مرز هاله صفر شود. اما فشار شعاعی منفی است و با افزایش شعاع

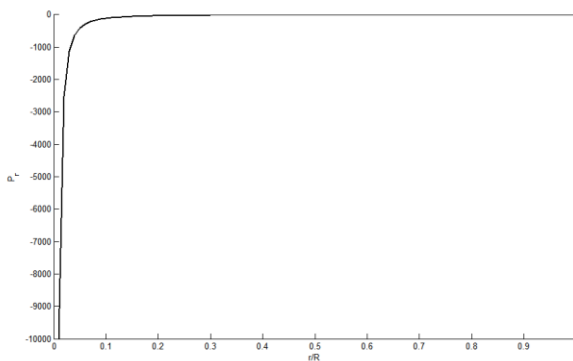
¹ Dominant Energy Condition

زیاد می شود تا این که روی مرز به صفر می رسد. فشار مماسی نیز مقداری نزدیک به صفر دارد و با افزایش شعاع اُفت کمی می کند.



شکل ۲: منحنی خط سیاه (منحنی بالایی) و منحنی نقطه چین (منحنی پایینی) به ترتیب معرف چگالی انرژی و فشار مماسی برای مدل b هستند. $\frac{v_c^2}{R^2} = 1$ اختیار شده است.

در شکل (۲) دیده می شود که رفتار چگالی، مشابه مدل a است و فشار مماسی نیز مقداری منفی دارد که با افزایش شعاع، مقدارش زیاد شده تا این که روی مرز هاله به کران بالا، صفر، میل می کند.



شکل ۳: منحنی فشار شعاعی برای مدل b بر حسب $\frac{r}{R}$ است. $\frac{v_c^2}{R^2} = 1$ اختیار شده است.

در شکل (۳) مشاهده می شود که فشار شعاعی مقداری منفی دارد که خیلی سریع به صفر میل می کند.

۴. همگرایی گرانشی

با کمک این مدل‌ها می‌توان خمش نور را هنگام عبور از میان هاله محاسبه کرد. ابتدا حالت کلی را در نظر می‌گیریم که پارامتر برخورد^۱ از شعاع هاله کوچک‌تر است. بنابراین اشعه نور ابتدا با متریک شوارزشیلد منتشر می‌شود، سپس در داخل هاله با متریک هاله منتشر می‌شود. فرض می‌کنیم اشعه نور در صفحه استوایی منتشر می‌شود. با کمک معادلات اوایلر-لاگرانژ^۲ برای مسیر نور گونه داریم:

$$e^{2\Phi(r)} \frac{dt}{d\lambda} = k \quad (28)$$

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = h \quad (29)$$

که k و h ثابت‌های معرف انرژی و تکانه زاویه‌ای فوتون هستند و λ پارامتر آفین^۳ دلخواه نظیر مسیر نور است. معادله دیگر با تغییر متغیر $u = \frac{1}{r}$ عبارت است از:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = -u^2 e^{-2\lambda} + \frac{k^2}{h^2} e^{-2(\phi+\lambda)} \quad (30)$$

اگر نزدیک‌ترین نقطه میل را $u_0 = \frac{1}{b}$ بنامیم با انتگرال‌گیری از رابطه فوق خواهیم

$$\Delta = 2 \int_0^{\frac{1}{b}} \frac{e^{2(\phi+\lambda)}}{e^{2\phi(u_0)}} \frac{du}{\sqrt{u^2 - e^{2(\phi(u)+\phi(u_0))} u^2}} \quad (31)$$

0

که Δ زاویه انحراف نور است. چنانچه نزدیک‌ترین نقطه میل داخل هاله باشد زاویه انحراف عبارت است از:

$$\Delta = 2 \int_{\frac{1}{R}}^{\frac{1}{b}} du \sqrt{\frac{e^{2(\phi+\lambda)}}{e^{2\phi(u)}(u_0^2 - e^{2(\phi(u)-\phi(u_0))} u^2)}} + 2 \int_0^{\frac{1}{R}} du \sqrt{\frac{1}{e^{2\phi(u)}(u_0^2 - e^{-2\phi(u_0)} u^2 E(1-2Mu))}} \quad (32)$$

و برای حالتی که نزدیک‌ترین میل خارج هاله باشد:

$$\Delta = 2 \int_0^{\frac{1}{b}} du \sqrt{\frac{1}{E(1-\frac{2M}{R})(u_0^2 - \frac{1-2Mu}{1-\frac{2M}{R}} u^2)}} \quad (33)$$

در نبود گرانش، $\alpha = 0$ است. بنابراین زاویه انحراف در واقع $\delta = \Delta(\alpha) - \Delta(0) \cong$

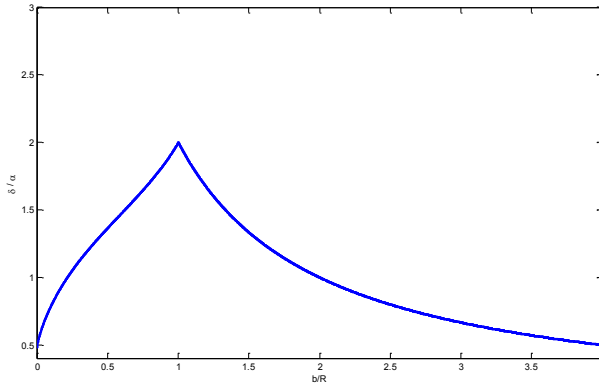
$\alpha \frac{d\Delta}{d\alpha} |_{\alpha=0}$ خواهد بود. برای محاسبه انتگرال‌های (۳۲) و (۳۳)، کمیت‌های زیر انتگرال را

¹ Impact Parameter

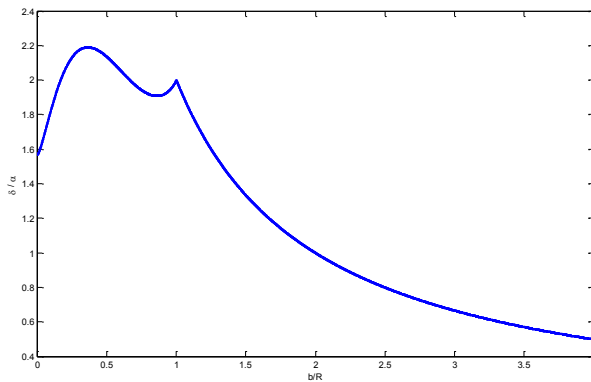
² Euler-Lagrange

³ Affine Parameter

بر حسب α تا جمله‌های مرتبه‌اول بسط می‌دهیم و با کمک آن نمودار $\frac{\delta}{\alpha}$ را بر حسب $\frac{b}{R}$ برای دو مدل داده شده در شکل‌های (۴) و (۵) رسم می‌کنیم.



شکل ۴: نمودار $\frac{\delta}{\alpha}$ بر حسب $\frac{b}{R}$ برای مدل a

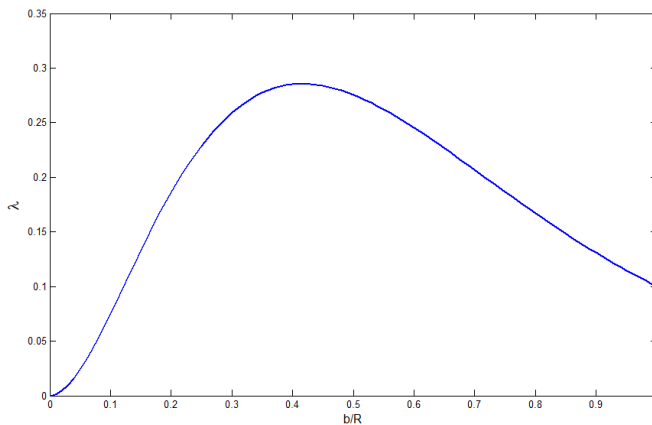


شکل ۵: نمودار $\frac{\delta}{\alpha}$ بر حسب $\frac{b}{R}$ برای مدل b

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از فشار شعاعی معرفی شده در [11] به محاسبه همگرایی گرانشی نوری که از میان هاله می‌گذرد، پرداختیم. بدین منظور از بسط زاویه انحراف بر حسب α استفاده کردیم. این انحراف نور را بر حسب نسبت پارامتر برخورد به شعاع هاله رسم

کردیم. نمودار ۴ منحنی $\frac{\delta}{\alpha}$ را بر حسب $\frac{b}{R}$ نشان می‌دهد. برای حالتی که پارامتر برخورد از شعاع هاله کوچکتر است، با نزدیک شدن b به شعاع هاله همان‌طور که انتظار می‌رود، میزان انحراف اشعه نور بیشتر می‌شود تا جایی که b برابر با شعاع هاله شود که در آن جا بیشینه انحراف نور خواهد بود. از آن جا به بعد با بزرگتر شدن پارامتر برخورد از شعاع هاله، انحراف نور هم به دلیل فاصله‌ای که از جسم سنگین گرفته، کمتر و کمتر می‌شود. همان‌طور که از شکل پیداست در نقطه $b=R$ ناپیوستگی در مشتق داریم که این خیلی دور از انتظار نیست و مشابه نتیجه‌ای است که در [6] با فرض مدلی در $f(R)$ به دست آمد؛ اما در نمودار ۵ بیشینه انحراف نور زمانی که پارامتر برخورد برابر با شعاع هاله است، رخ نمی‌دهد بلکه در جایی رخ می‌دهد که $\frac{b}{R} = 0.3$ و این نشان می‌دهد که خمیدگی خطوط فضا-زمان در این مقدار برای پارامتر برخورد بیشتر از حالتی است که برابر با شعاع هاله باشد، البته دلیل آن هم به شکل ضریب λ متریک در این شعاع بستگی دارد. اگر نمودار λ را بر حسب $\frac{b}{R}$ رسم کنیم (شکل ۶) از نوع شکل واضح است که به ازای $\frac{b}{R} \sim 0.3$ یک قله وجود دارد که نشان می‌دهد انحراف نور در این مقدار برای پارامتر برخورد بیشینه می‌شود.



شکل ۶: نمودار λ بر حسب $\frac{b}{R}$ برای مدل b.

۶. مراجع

- [1] Sanders; Dark Matter Problem: a historical perspective. Cambridge university press, 2010.
- [2] T. Matos, F.S. Guzman and D. Nunez, "Spherical scalar field halo in galaxies" *Phys. Rev. D* **62**, 061301 (2000)
- [3] A. Macias, J. L. Cervantes-Cota, C. Lammerzahl, "Exact Solutions and Scalar Field in Gravity". Kluwer, Dordrecht, 2001.
- [4] S. Bharadwaj and S. Kar, "Modelling galaxy halos using dark matter with pressure", *Phys. Rev. D* **68** (2003)
- [5] K.-Y. Su, P. Chen; "Comments on "Modeling Galaxy Halos Using Dark Matter with Pressure". *Physical Review D* 79.12 (2009): 128301.
- [6] T. Faber and M. Visser, "Combining rotation curves and gravitational lensing: how to measure the equation of state of dark matter in the galactic halo", *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **372** (2006)
- [7] K.-Y. Su and P. Chen, "Solving the Cusp-Core problem with a novel scalar field dark matter" *JCAP08* (2011) **016**
- [8] F. Shojai, A. Shojai, "An $f(R)$ model for dark matter: rotation curves and gravitational lensing" *AGenRelativGravit* (2014) **46:1704**, DOI 10.1007/s10714-014-1704-4
- [9] K.K. Nandi, I. Valitov, N. G. Migranov ; "Remarks On The Spherical Scalar Field Halo In Galaxies". *Physical Review D* 80.4 (2009): 04730.
- [10] K.Y. Su, P. Chen; "Comments on "Remarks on the spherical scalar field halo in galaxies"". *arXiv preprint arXiv:1009.0869* (2010).

[۱۱] بنفشه بهرامی اصل، فاطمه شجاعی باغینی؛ "مدلسازی هاله ماده تاریک با وجود فشار"؛ همایش ملی گرانث و کیهانشناسی؛ دانشگاه صنعتی شریف، ۲۰ بهمن ماه ۱۳۹۳.