

## Comparison of energy levels of $^{19}\text{O}$ and $^{21}\text{O}$ with using shell model

N. Malekinezhad<sup>1</sup>; M.R. Shojaei<sup>2</sup>; M.R. Sarkardei<sup>3</sup>

Received: 2015.11.21

Accepted: 2016.8.25

### Abstract

*Based on shell model, isotopes of  $^{19}\text{O}$  and  $^{21}\text{O}$  ends to  $1d_{5/2}$ . Considering  $^{16}_8\text{O}$  as a core, the nucleons of outside the closed shell can be considered as a Three and Five-particle system. Since the capacity of nucleons is effective in the energy spectrum, In this work, we use the shell model, And considering the Gaussian potential for interaction between nucleons, to calculate the energy levels of these isotopes; we use the analytical supersymmetry method. Our results compared with experimental results and the results of other research groups are in good agreement.*

**keywords:** shell model, Energy states, Oxygen isotopes, Gaussian potential

---

<sup>1</sup> M. Sc. Physics Student, Shahrood University

<sup>2</sup> Associate Professor of Physics, Shahrood University, [mayhashojaei@yahoo.com](mailto:mayhashojaei@yahoo.com)

<sup>3</sup> Associate Professor of Physics, Alzahra University

## مقایسه ترازهای انرژی $^{21}O$ و $^{19}O$ با استفاده از مدل لایه‌ای

نسرین ملکی نژاد<sup>۱</sup>

محمد رضا شجاعی<sup>۲</sup>

محمد رضا سرکرده‌ای<sup>۳</sup>

تاریخ دریافت: ۹۴/۸/۳۰

تاریخ تصویب: ۹۵/۶/۳

### چکیده

بر اساس مدل لایه‌ای، هسته‌های  $^{19}O$  و  $^{21}O$  به تراز  $1d_{5/2}$  ختم می‌شوند. با در نظر گرفتن  $^{16}O$  به عنوان یک هسته مرکزی، نوکلئون‌های خارج پوسته بسته را می‌توان یک سیستم سه ذره‌ای و پنج ذره‌ای در نظر گرفت. از آنجا که نوکلئون‌های تراز آخر در طیف انرژی تأثیر گذار می‌باشند، ما در این کار با استفاده از مدل لایه‌ای و در نظر گرفتن پتانسیل گوسی برای برهمکنش بین نوکلئون‌ها به محاسبه ترازهای انرژی این دو ایزوتوپ بر

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد فیزیک، دانشگاه شاهرود

<sup>۲</sup> دانشیار فیزیک دانشگاه شاهرود؛ mayhashojaci@yahoo.com

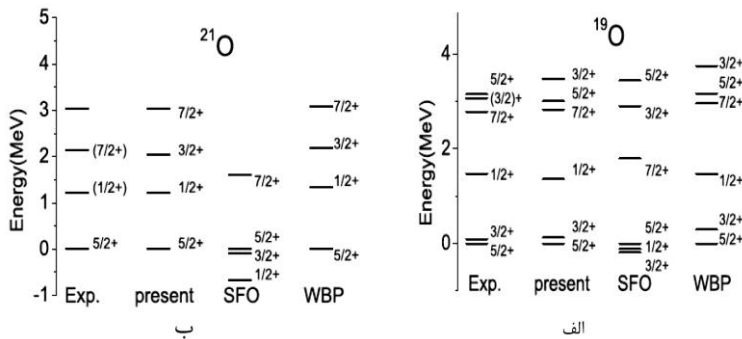
<sup>۳</sup> دانشیار فیزیک دانشگاه الزهراء

مبنای روش تحلیلی آبرتقارن پرداخته‌ایم. نتایج به دست آمده در مقایسه با نتایج تجربی و نتایج دیگر گروه‌های تحقیقاتی از همخوانی خوبی برخوردار است.

## واژه‌های کلیدی: مدل لایه‌ای، ترازهای انرژی، ایزوتوپ‌های اکسیژن، پتانسیل گوسی

### ۱. مقدمه

ویژگی استاتیکی، یکی از ویژگی‌های مهم هسته‌ها می‌باشد. از جمله این ویژگی‌ها می‌توان به اسپین، پاریته، طیف انرژی و... اشاره کرد. بر اساس مدل لایه‌ای، خواص هسته‌ها را نوکلئون‌های خارج پوسته بسته تعیین می‌کنند. طیف انرژی  $^{19}\text{O}$  و  $^{21}\text{O}$  مطابق شکل ۱ می‌باشد. از آنجا که آخرین تراز نوکلئونی این دو ایزوتوپ به  $1d_{5/2}$  ختم می‌شود، دارای اسپین و پاریته یکسانی هستند، اما طیف انرژی آن‌ها متفاوت است. این اختلاف انرژی را می‌توانیم بر اساس مدل لایه‌ای به برهمکنش‌های بین نوکلئون‌های آن نسبت دهیم. بر اساس این مدل،  $^{16}\text{O}_8$  را با دو عدد جادویی ۸-۸ به عنوان هسته مرکزی فرض می‌کنیم.



شکل ۱: الف) طیف انرژی  $^{19}\text{O}$  (ب) طیف انرژی  $^{21}\text{O}$  [۱].

Q. Zhi و همکارانش با در نظر گرفتن مدل میکروسکوپی-ماکروسکوپیکی توانستند انرژی حالت پایه ایزوتوپ‌های اکسیژن را محاسبه کنند [۲]. در این مقاله ما انرژی حالت پایه را برای این دو ایزوتوپ محاسبه کرده‌ایم. در این کار، ما معادله شرودینگر در D

بعد را برای نوکلئون‌های ظرفیت حل کرده‌ایم. نوکلئون‌های درون هسته‌ی این دو ایزوتوپ را همانند سیستم سه و پنج ذره‌ای فرض کرده و با استفاده از مختصات ژاکوبی [۳،۴] ترازهای انرژی و تابع موج را محاسبه کرده‌ایم. یکی از پتانسیل‌های مناسب در این زمینه، پتانسیل گوسی می‌باشد [۵]. علاوه بر برهمکنش‌های بین دونوکلئون ( $\langle V_{2N} \rangle$ ) برهمکنش‌های دیگری نیز برای سیستم‌های چندنوکلئونی وجود دارد ( $\langle V_{3N} \rangle$ ) که نسبت به برهمکنش‌های دونوکلئونی کوچکتر می‌باشد، یعنی می‌توانیم بایک تقریب مناسب فقط برهمکنش‌های  $V_{2N}$  را در نظر بگیریم [۶]. اغلب روش‌های حل معادله شرودینگر بر اساس سیستم‌های دو جرمی می‌باشد، از آن‌جا که هسته به صورت سیستم‌های چند جرمی (چندنوکلئونی) است پس نیاز به دستگاه مختصات جدیدی داریم تا برای سیستم‌های چند جرمی نیز بتوانیم از این روش‌ها استفاده کنیم. می‌توان با استفاده از تبدیلات مختصات ژاکوبی که به صورت زیر بیان می‌شود برای سیستمی متشکل از  $N$  ذره با جرم یکسان معادله شرودینگر را حل کرد:

$$\bar{\xi}_i = \sqrt{\frac{i}{i+1}} \left( \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \bar{x}'_j - \bar{x}'_{i+1} \right), \quad i=1,2,\dots,N-1 \quad (1)$$

$$\bar{\xi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{x}'_1 - \bar{x}'_2) \quad (2)$$

$$\bar{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (\bar{x}'_1 + \bar{x}'_2 - 2\bar{x}'_3) \quad (3)$$

$$R = \frac{\bar{x}'_1 + \bar{x}'_2 + \bar{x}'_3}{3} \quad (4)$$

در این صورت می‌توانیم فوق شعاع (که در آن  $X$  ابر شعاع می‌باشد) را به صورت زیر مشخص کنیم.

$$X = \sqrt{\bar{\xi}_1^2 + \bar{\xi}_2^2} \quad (5)$$

پتانسیل گوسی بر حسب فوق شعاع به شکل زیر می‌باشد:

$$V(x) = -V_0 \exp\left(-\frac{x^2}{\alpha^2}\right) \quad (6)$$

قسمت شعاعی معادله شرودینگر در فضای  $D$ -بعدی مطابق با رابطه زیر است [۷،۸]:

$$\left[ \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{D-1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{l(l+D-2)}{x^2} \right) + V(x) \right] R(x) = E R(x) \quad (7)$$

که در آن  $D = 3N - 3$  و  $N$  تعداد ذرات است [۹]. برای یک سیستم پنج ذره‌ای،  $D = 3 \times 5 - 3 = 12$  است. بنابراین برای  $^{21}\text{O}$  با در نظر گرفتن نوترون‌های بیرون پوسته بسته به عنوان یک سیستم پنج ذره‌ای معادله شرودینگر به صورت زیر در می‌آید:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[ \frac{d^2 R(x)}{dx^2} + \frac{11}{x} \frac{dR(x)}{dx} - \frac{l(l+10)}{x^2} R(x) \right] + V(x)R(x) = ER(x) \quad (۸)$$

با استفاده از تغییر متغیر  $U_{nl}(x) = x^{\frac{11}{2}} R_{nl}(x)$  داریم

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 U(x)}{dx^2} + (-E - V_0 e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} + \frac{\hbar^2(2l+9)(2l+11)}{8\mu x^2}) U(x) = 0 \quad (۹)$$

با توجه به این که معادله شرودینگر برای تعداد کمی از پتانسیل‌ها دقیقاً قابل حل می‌باشد و حل تحلیلی معادله شرودینگر در حضور پتانسیل گوسی بدون تقریب امکان پذیر نیست، بنابراین برای حل این گونه پتانسیل‌ها به شیوه‌های دیگری متوسل می‌شویم. چندین روش، برای حل تحلیلی معادله شرودینگر وجود دارد، از جمله ابرتقارن،  $NU$ ، وردشی، روش تکرار مجانب. روش ابرتقارن در حل معادلات در هر دو مکانیک کوانتومی نسبی و غیر نسبی موفق بوده است [۱۰-۱۳].

با استفاده از روش تحلیلی ابرتقارن، ابرتانسیل پیشنهادی را به صورت زیر تعریف

می‌کنیم.

$$W(x) = \frac{-\hbar}{\sqrt{2\mu}} \left( Cx + \frac{D}{x} \right) \quad (۱۰)$$

با توجه به پتانسیل‌های همسان ابرتقارنی  $V_+(x)$  و  $V_-(x)$  داریم:

$$V_+(x) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left( C^2 x^2 + \frac{D^2}{x^2} + 2CD \right) + \frac{\hbar^2}{2\mu} \left( C - \frac{D}{x^2} \right) \quad (۱۱)$$

$$V_-(x) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left( C^2 x^2 + \frac{D^2}{x^2} + 2CD \right) - \frac{\hbar^2}{2\mu} \left( C - \frac{D}{x^2} \right) \quad (۱۲)$$

که در این روابط  $D = 1 + \frac{11}{2}$  و  $C = \pm \sqrt{\frac{2\mu V_0}{\hbar^2 \alpha^2}}$  می‌باشد. با توجه به روش ابرتقارن، طیف ویژه مقادیر انرژی برای سیستم پنج ذره‌ای  $^{21}\text{O}$  با در نظر گرفتن تقریب مرتبه اول پتانسیل، که به ازای توان‌های بزرگ  $\alpha$  می‌توان از مرتبه‌های بالاتر صرف نظر کرد، به صورت زیر به دست می‌آید.

$$E_{n,l} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \sqrt{\frac{2\mu V_0}{\hbar^2 \alpha^2}} (-4n + 2l + 12) - V_0 \quad (13)$$

و تابع موج آن مطابق با رابطه زیر می باشد:

$$R_{n,l}(x) = N \exp\left(\frac{-1}{2} \sqrt{\frac{2\mu V_0}{\hbar^2 \alpha^2}} x^2\right) x^l \quad (14)$$

که در آن  $N$  ضریب بهنجارش است. همچنین می توان تابع موج حالت های برانگیخته را به دست آورد. برای محاسبه تابع موج اولین حالت برانگیخته داریم:

$$R_1(x, l) = \frac{-\hbar}{\sqrt{2\mu}} x^l N \exp\left(-\sqrt{\frac{2\mu V_0}{\hbar^2 \alpha^2}} \frac{x^2}{2}\right) \left[-2\sqrt{\frac{2\mu V_0}{\hbar^2 \alpha^2}} x + \frac{4l+11}{2x}\right] \quad (15)$$

### شکافتگی انرژی در اثر برهمکنش اسپین - مدار

در چند دهه اخیر، پتانسیل های نوکلئون-نوکلئون زیادی ارائه شده است. در فیزیک هسته ای برهمکنش اسپین-مدار از برهمکنش نوکلئون-نوکلئون ناشی می شود. ما از برهمکنش اسپین-مدار برای به دست آوردن شکافتگی انرژی تراز پایه، برای این دو ایزوتوپ استفاده کرده ایم [۱۴].

$$V_{s,l}(x) = \frac{1}{2m^2 c^2} \frac{1}{x} \frac{df}{dx} S.L, \quad f(x) = -V_0 \exp\left(-\frac{x^2}{\alpha^2}\right) \quad (16)$$

که در آن  $S$  و  $L$  به ترتیب عملگر اندازه حرکت مداری و اسپینی هسته هستند.

$$\langle S.L \rangle = \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \quad (17)$$

که اختلاف انرژی در دو حالت  $j=1+1/2$  و  $j=1-1/2$  به صورت زیر است.

$$\langle S.L \rangle_{j=1+1/2} - \langle S.L \rangle_{j=1-1/2} = \frac{1}{2} (2l+1) \hbar^2 \quad (18)$$

و جابجایی انرژی مرتبه اول طبق رابطه زیر می باشد:

$$\Delta E_1 = \int R^*(x) V_{s,l} R(x) x^{D-1} dx \quad (19)$$

شکافتگی اسپین-مدار هم در سیستم های نسبیتی و هم در سیستم های غیرنسبیتی به صورت گسترده بحث شده است [۱۵، ۱۶]. بعد از اعمال اثر جفت شدگی اسپین-مدار بر پتانسیل مورد نظر تبهگی از بین می رود. در جدول ۱ به ازای بهترین مقادیر، انرژی حالت پایه را برای  $^{21}\text{O}$  محاسبه کردیم. همچنین نتایج شکافتگی انرژی حالت پایه را در اثر برهمکنش اسپین-مدار در ستون ۷ نشان داده ایم.

**جدول ۱:** ویژه مقادیر انرژی حالت پایه برای  $^{21}\text{O}$

${}^A_Z X_N$	$V_0$ (MeV)	$\alpha$ (fm) <sup>-2</sup>	$E_{\text{cal}}$ (MeV)	$E_{\text{exp}}$ (MeV) [۱۷]	$E_{\text{other}}$ (MeV) [۲]	$E_{V(t)+SL}$ (MeV)	$\Delta E$
$^{21}\text{O}$	۲۰	۲	۱۵۶/۶۵				۱/۴۸
	۳۵	۲/۵	۱۵۰/۶۹	۱۵۵/۱۷	۱۶۰/۲۱	۱۵۵/۰۴۳	۴/۴۸
	۳۶	۲/۵	۱۵۳/۳۴				۱/۸۳
	۳۶/۵	۲/۵	۱۵۴/۶۵				۰/۵۲

برای  $^{19}\text{O}$  نیز با در نظر گرفتن یک سیستم سه ذره‌ای برای نوکلئون‌های خارج پوسته بسته معادله شرودینگر در D بعد با توجه به رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\left[ \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{D-1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{l(l+D-2)}{x^2} \right) + V(x) \right] R(x) = ER(x) \quad (20)$$

برای سیستم سه ذره‌ای  $D = 3N - 3 = 6$  داریم:

$$\left[ \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} - \frac{l(l+4)}{x^2} \right) + V(x) \right] R(x) = ER(x) \quad (21)$$

که با قرار دادن پتانسیل گوسی مطابق با رابطه (۶) در معادله شرودینگر به رابطه زیر می‌رسیم.

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 U(x)}{dx^2} + [-E + V_0 e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} + \frac{\hbar^2(2l+3)(2l+5)}{8\mu x^2}] U(x) = 0 \quad (22)$$

چون حل تحلیلی این معادله بدون تقریب امکان‌پذیر نیست، برای حل آن از روش اَبرتقارن استفاده می‌کنیم. با تکرار محاسبات به همان شیوه پیش، طیف انرژی به ازای تقریب مرتبه اول پتانسیل به صورت زیر به دست می‌آید.

$$E_{n,l} = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \sqrt{\frac{2\mu V_0}{\hbar^2 \alpha^2}} (-4n + 2l + 6) - V_0 \quad (23)$$

و تابع موج سیستم را می‌توان از رابطه زیر تعیین کرد:

$$R_{n,l}(x) = N \exp\left(-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\mu V_0}{\hbar^2 \alpha^2}} x^2\right) x^l \quad (24)$$

مقادیر انرژی و شکافتگی اسپین-مدار برای  $^{19}\text{O}$  در جدول ۲ درج شده است.

**جدول ۲:** ویژه مقادیر انرژی حالت پایه برای  $^{19}\text{O}$

${}^A_Z\text{X}_N$	$V_0$ (MeV)	$\alpha$ (fm) <sup>-2</sup>	$E_{\text{cal}}$ (MeV)	$E_{\text{exp}}$ (MeV) [۱۷]	$E_{\text{other}}$ (MeV) [۲]	$E_{V(r)+SL}$ (MeV)	$\Delta E$
$^{19}\text{O}$	۲۹	۱/۵	۱۴۲/۱۸	۱۴۳/۷۶	۱۴۶/۸۷	۱۴۲/۷۸	۱/۵۸
	۲۸	۱/۵	۱۳۹/۲۱				۴/۵۵
	۵۴	۲	۱۴۰/۸۷	۲/۸۹			
	۹۰	۳	۱۳۹/۸۴	۳/۹۲			

## ۲- نتیجه گیری

ما در این کار، معادله شرودینگر را برای سیستم‌های چندذره‌ای با پتانسیل گوسی به صورت تحلیلی و با استفاده از روش ابرتقارن حل کرده، انرژی و تابع موج حالت پایه را محاسبه نموده‌ایم. همچنین اثر برهمکنش اسپین مدار را بر این پتانسیل مورد بررسی قرار دادیم که خلاصه نتایج آن در جدول های ۱ و ۲ آمده و با مقادیر تجربی همخوانی خوبی دارد. این نتایج نه تنها برای فیزیکدانان نظری بلکه برای فیزیکدانان تجربی نیز می‌تواند جالب توجه باشد. همچنین می‌توان از این پتانسیل برای توصیف دیگر سیستم‌های فیزیکی نیز استفاده کرد.

## ۳- مراجع

- [1] C. Yuan, T. Suzuki, T. Otsuka, F. Xu, and N. Tsunoda; "Shell-model study of boron, carbon, nitrogen and oxygen isotopes based on monopole-based-universal interaction"; *Physical Review C* **85** (2012).
- [2] Q. Zhi, and Z. Ren; "Systematic studies on the exotic properties of isotopes from oxygen to calcium"; *Nuc. Phys. A* **749** (2007) 10-28.
- [3] M. R. Shojaei and A. A. Rajabi; "Hypercentral constituent quark model and the hyperfine dependence potential"; *J. Phys. Research* **7** (2007) 2.
- [4] M. Aiello, M. Ferraries, M. Giannini, M. Pizzo and E. Santopinto; "A three-body force model for the nucleon"; *Phys. Lett. B* **387** (1996) 215-221.



- [5] S. Nandi; "The quantum Gaussian well"; *American Journal of Physics* **78**, no. 12 (2010) 1341-1345.
- [6] N. Kalantar-Nayestanaki, E. Epelbaum, J. G. Messchendorp and A. Nogga; "Signatures of three-nucleon interactions in few-nucleon systems"; *Rep. Prog. Phys.* **75** (2012).
- [7] H. Feizi, A. A. Rajabi and M. R. Shojae; "A Simple Approach to Study the Isospin Effect in Mass Splitting of Three-Nucleon Systems by Using Hyperspherical Functions"; *Commun. Theor. Phys.* **58**, no. 1 (2012) 141-145.
- [8] S. M. Ikhdaïr; "Exact solutions of the D-dimensional Schrödinger equation for a pseudo-Coulomb potential plus ring-shaped potential"; *Chinese Journal of Physics* **46** (2008) 3.
- [9] S. H. Dong; "The realization of dynamic group for the pseudoharmonic oscillator"; *Appl. Math. Lett.* **16** D (2003) 18.
- [10] A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov; "*Special Functions of Mathematical Physics*"; Birkhauser-Verlag, Basel (1988).
- [11] C. Berkdemir; "Pseudospin symmetry in the relativistic Morse potential including the spin-orbit coupling term"; *Nucl. Phys. A* **770** (2006) 32-39.
- [12] J. Suhonen; "*Nucleons to Nucleus*"; Springer-Verlag, Berlin (2007).
- [13] H. Ciftci, R. Hall and N. Saad; "Asymptotic iteration method for eigenvalue problems"; *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003) 11807-11816.
- [14] E. S. Cunningham, J. S. Al-Khalili and R. C. Johnson; "Effect of spin-spin interactions on nucleon-nucleus scattering"; *Phys. Rev. C* **87** (2013).
- [15] M. Lopez-Quelle, N. Van Giai and S. Marcos, et al; "Spin-orbit splitting in nonrelativistic and relativistic self-consistent models"; *Phys. Rev. C*, **61** (2000).
- [16] G. A. Lalazissis, D. Vretenar, and W. Poeschl; "Reduction of the spin-orbit potential in light drip-line nuclei"; *Phys. Lett. B* **418** (1998) 7-12.
- [17] G. Audi, A. H. Wapstra and C. Thibault; "The Nubase evaluation of nuclear and decay properties"; *Nucl. Phys. A* **729** (2003) 337.