

## Producing third order harmonics in propagating cylindrical waves in non-linear inhomogeneous media

Ali Bahari<sup>1</sup>  
Monireh Ranjbar<sup>2</sup>

Received: 2016-09-06

Accept: 2017-10-09

### Abstract

*The propagation of electromagnetic waves in nonlinear homogeneous and nonhomogeneous cylindrical media is studied in order to investigate the generation of third order harmonics by numerically solving coupled wave equations. The calculations show that the characteristic length of the interaction in homogenous media is very shorter than the characteristic length in inhomogeneous media. The reason for this behavior is that for inhomogeneous media  $\Delta k$  is very small and the output wave can get out of phase with its driving polarization at very big length of the interaction ( $r$ ). Therefore, as  $\Delta k$  increases, the length of the interaction and the maximum intensity of the generated wave decrease. Numerical calculations show that in homogeneous nonlinear optical media, since the wave amplitude of the created wave experiences large fluctuations, the phase matching condition is not satisfied, and the generated wave amplitude is smaller than inhomogeneous nonlinear optical media. The effect of third order nonlinear optical susceptibility on the generated wave amplitude in inhomogeneous media has been investigated.*

**Keywords:** Nonlinear optical media, Third harmonic generation, Optical susceptibility.

PACS numbers: 42.65.k; 42.65.Ky; 42.65.An

---

<sup>1</sup> **Corresponding author:** Associate Professor of physics, University of Lorestan

<sup>2</sup> Ph. D. Student of Physics

## تولید هارمونیک‌های مرتبه سوم در انتشار امواج استوانه‌ای در محیط‌های غیرخطی ناهمگن<sup>۱</sup>

علی بهاری\*<sup>۲</sup>، منیره رنجبر<sup>۳</sup>

تاریخ ارسال: ۱۳۹۵/۰۶/۱۶

تاریخ تصویب: ۱۳۹۶/۰۷/۱۷

### چکیده

انتشار امواج الکترومغناطیسی در محیط‌های غیرخطی همگن و ناهمگن استوانه‌ای برای تولید هارمونیک مرتبه سوم با استفاده از حل عددی معادلات موج جفت شده بررسی شده است. محاسبات نشان می‌دهد که طول مشخصه‌ی برهم‌کنش در محیط‌های همگن خیلی کوتاه‌تر از محیط‌های غیرهمگن است. دلیل این رفتار در محیط‌های ناهمگن این است که  $\Delta k$  خیلی کوچک است و موج خروجی در طول برهم‌کنشی بزرگی ( $\beta$ ) با قطبش مولدش غیرهمفاز می‌شود. بنابراین، با افزایش  $\Delta k$  طول برهم‌کنش و بیشینه‌ی شدت موج تولیدی کاهش می‌یابد. محاسبات عددی نشان می‌دهد که در محیط‌های غیرخطی همگن، به دلیل نوسانات زیاد دامنه‌ی موج تولیدشده، شرایط انطباق فاز برقرار نیست و دامنه‌ی

<sup>۱</sup> شناسه دیجیتال (DOI): 10.22051/jap.2017.11599.1053

<sup>۲</sup> دانشیار گروه فیزیک دانشگاه لرستان؛ aliahari2@yahoo.com

<sup>۳</sup> دانشجو دکتری

موج تولید شده در این محیط‌ها در مقایسه با محیط‌های غیرخطی ناهمگن، کوچک‌تر است. اثر پذیرفتاری غیرخطی مرتبه سوم روی دامنه‌ی موج تولید شده در محیط‌های ناهمگن بررسی شده است.

**واژه‌های کلیدی:** محیط‌های نوری غیر خطی، تولید هارمونیک سوم،

گذردهی غیر خطی

## ۱- مقدمه

اپتیک غیرخطی در طی ۵۰ سال اخیر یکی از پویاترین گستره‌های تحقیقاتی بوده و ویژگی‌های مهمی از آن بررسی شده است که از میان آن‌ها می‌توان به اپتیک غیرخطی در سطوح، در نانوسیم‌های فوتونی، در نانو ساختارها و اپتیک غیرخطی استوانه‌ای اشاره نمود [۱]. بررسی انتشار امواج الکترومغناطیسی در محیط‌های غیرخطی یکی از مسئله‌های اساسی و پرکاربرد در فیزیک می‌باشد. انتشار امواج الکترومغناطیسی در محیط غیرخطی منجر به پدیده‌های غیرخطی بسیاری از جمله تولید هارمونیک‌ها، خودکانونی شدن، تولید جمع و تفاضل فرکانسی در محیط می‌شود [۲]. در اپتیک خطی از اصل برهم‌نهی برای بررسی انتشار امواج استوانه‌ای استفاده می‌شود، اما به کار بردن روش‌های تحلیلی مبتنی بر این اصل در اپتیک غیرخطی، دشوار است. از این رو از روش‌های عددی (حل معادلات جفت شده) برای بررسی انتشار این امواج در محیط‌های غیرخطی استفاده می‌شود. پیدایش مرتبه‌های غیرخطی قطبش در میدان‌هایی با شدت بالا به وجود می‌آید. این قطبش ناشی از ویژگی‌های غیرخطی اتم‌ها و مولکول‌های ماده است و اساساً در تمام محیط‌ها می‌تواند به وجود آید و باعث ایجاد پدیده‌های مختلفی مانند تولید هارمونیک‌های مرتبه سوم، اثر کر، خودمدولاسیون فازی، ترکیب چهارموج (FWM) و پدیده‌های دیگر شود. ترکیب چهارموج، یک اثر غیرخطی است که توسط قطبش غیرخطی مرتبه سوم و در هر محیطی می‌تواند رخ دهد. در این پدیده، سه موج با بسامدهای متفاوت  $\omega_1$ ،  $\omega_2$  و  $\omega_3$  ترکیب شده و موج چهارمی با بسامد  $\omega_4$  تولید می‌کنند. اگر سه موج ورودی دارای بسامدهای یکسان باشند، قطبش غیرخطی می‌تواند منجر به فرایند ترکیب چهارموج تبهگن (DFWM) یا

تولید هارمونیک سوم (THG) شود. در این پدیده، یک میدان الکتریکی با بسامد  $\omega$  توسط قطبش غیرخطی، میدانی با بسامد  $3\omega$  تولید می‌کند. هارمونیک سوم که برای اولین بار در دهه‌ی ۱۹۶۰ گزارش شد، به طور گسترده برای تولید تابش در محدوده‌ی طیفی فرابنفش و برای ایجاد طول‌موج‌هایی که لیزرهای معمولی قادر به تولید آن نیستند، استفاده می‌شود [۴،۳]. انتشار امواج الکترومغناطیسی در محیط‌های مختلف از جمله محیط‌های غیرخطی ناهمگن و غیرپاشنده [۵] و همگن و پاشنده [۶] بررسی شده است. در [۸،۷] اثر غیرخطی مرتبه دوم در محیط همگن مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته که در آن، پاسخ‌های تحلیلی معادلات ماکسول و معادلات جفت‌شده‌ی میدان‌ها با یکدیگر مقایسه شده‌اند. یکی از موضوعات اساسی در بررسی پدیده‌های غیرخطی، انطباق فازی است. عدم انطباق فازی می‌تواند بازده این پدیده‌ها را شدیداً کاهش دهد. بنابراین، برای تولید موجی با بازده بالا باید میدان پمپ و میدان خروجی، انطباق فازی داشته باشند. بررسی انطباق فازی در یک محیط استوانه‌ای غیرخطی در [۱۰،۹] بررسی شده است. در [۱۰] از انطباق فازی کامل در یک مشدد میکرواستوانه‌ای ZnSe برای تولید هارمونیک دوم استفاده شده است. در این مقاله، تولید هارمونیک سوم در انتشار امواج استوانه‌ای در محیط غیرخطی بررسی شده است. از معادلات جفت‌شده‌ی میدان‌ها که تولید هارمونیک سوم را در محیط، توصیف می‌کنند، استفاده شده است. محاسبات عددی برای دامنه‌های میدان‌های ورودی و خروجی در محیط‌های همگن و ناهمگن مورد بررسی قرار گرفته و در پایان، خلاصه‌ای از نتایج به دست آمده ارائه شده است.

## ۲- تئوری و محاسبات عددی

به طور کلی، گذردهی غیرخطی مرتبه سوم کوچک‌تر از مرتبه دوم است. در جامدات، نسبت پذیرفتاری غیرخطی مرتبه سوم ( $\chi^{(3)}$ ) به مرتبه دوم آن ( $\chi^{(2)}$ ) از مرتبه‌ی  $10^{-9}$  m/V است که نیاز به میدان‌هایی به بزرگی  $10^9$  m/V دارد تا بتوان در حضور پذیرفتاری غیرخطی مرتبه دوم، مرتبه سوم را نیز در نظر گرفت. اگر محیط، دارای مرکز وارون باشد، گذردهی مرتبه سوم، جمله‌ی غالب در قطبش غیرخطی خواهد بود. در این مقاله، تولید هارمونیک سوم در یک محیط غیرخطی، همسانگرد، غیرپاشنده و بدون اتلاف و به

وسیله‌ی معادلات جفت‌شده‌ای که این پدیده را برای امواج کند تغییر توصیف می‌کند، بررسی می‌شود. اگر محور تقارن محیط در راستای محور Z دستگاه مختصات استوانه‌ای در نظر گرفته شود، میدان‌ها مستقل از  $\varphi$  و Z هستند و در این حالت، میدان الکتریکی و قطبش غیرخطی به صورت زیر خواهند بود:

$$E = \frac{1}{2} \sum_i (A_i(r) J_0(k_i r) e^{-i\omega_i t} + C. C.) \quad (۱)$$

$$P_{NL} = \frac{1}{2} \sum_i (P_i(r) J_0(k_i r) e^{-i\omega_i t} + C. C.) \quad (۲)$$

معادله‌ی موج در محیط ناهمگن به صورت زیر است:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\vec{E}(\omega_i)}{dr} \right) + k^2 \vec{E}(\omega_i) = -\omega^2 \mu_0 \vec{P}_{NL}(\omega_i); \quad i = 1, 2 \quad (۳)$$

$$P_{NL}(\omega) = \frac{3}{4} \epsilon_0 \chi_{eff}^{(3)}(-\omega; 3\omega, -\omega, -\omega) E(3\omega) E^*(\omega) E^*(\omega) \quad (۴)$$

$$P_{NL}(3\omega) = \frac{1}{4} \epsilon_0 \chi_{eff}^{(3)}(-3\omega; \omega, \omega, \omega) E^3(\omega) \quad (۵)$$

با استفاده از تقریب دامنه‌ی کند تغییر، معادله‌ی بالا را می‌توان بر حسب دامنه‌ی میدان‌ها

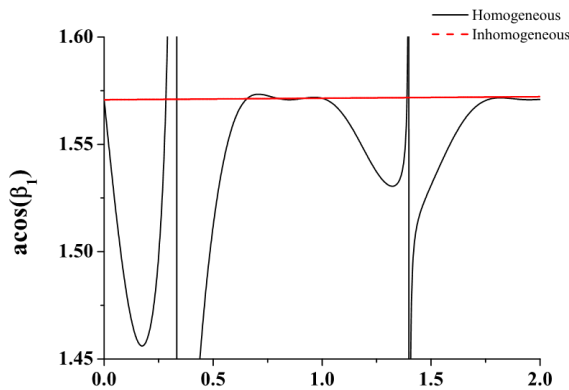
نوشت:

$$\frac{dA_1}{dr} = \left( \frac{-3k_1 \chi_{eff}^{(3)}}{4\epsilon_1} \right) \beta_1 (A_1^*)^2 A_2; \quad \beta_1 = \left( \frac{k_1 r J_0^2(k_1 r) J_0(k_2 r)}{J_0(k_1 r) - 2k_1 r J_1(k_1 r)} \right) \quad (۶)$$

$$\frac{dA_2}{dr} = \left( \frac{-k_1 \chi_{eff}^{(3)}}{4\epsilon_1} \right) \beta_2 (A_1)^3; \quad \beta_2 = \left( \frac{k_2 r J_0^3(k_1 r)}{J_0(k_2 r) - 2k_2 r J_1(k_2 r)} \right) \quad (۷)$$

معادلات اخیر، معادلات اصلی برای بررسی نحوه‌ی تغییر دامنه‌ی میدان‌های اولیه و تولید شده در محیط غیرخطی برای فرایند تولید هارمونیک سوم هستند که آنها را به صورت عددی و با استفاده از روش ode23 با الگوریتم (Bogacki-Shampine) در قسمت شبیه‌سازی نرم افزار متلب حل نموده‌ایم. در این روابط  $\beta_1$  و  $\beta_2$  توابعی هستند که شرایط انطباق فازی را تعیین می‌کنند. از مقایسه با امواج تخت، می‌توان این پارامترها را به صورت  $\cos \Delta k r = \beta$  در نظر گرفت. شکل ۱ نمودار پارامتر  $\beta$  را به صورت تابعی از  $r$  برای محیط‌های همگن و ناهمگن نشان می‌دهد. همان‌طور که از این نمودار مشخص می‌شود،  $\beta_1$  در محیط همگن که در آن گذرده‌ی مستقل از  $r$  است، دارای رفتار نوسانی است، اما در محیط ناهمگن که گذرده‌ی وابسته به  $r$  است، تقریباً ثابت می‌باشد. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که شرایط انطباق فازی در محیط ناهمگن، به سادگی قابل دسترسی می‌باشد.

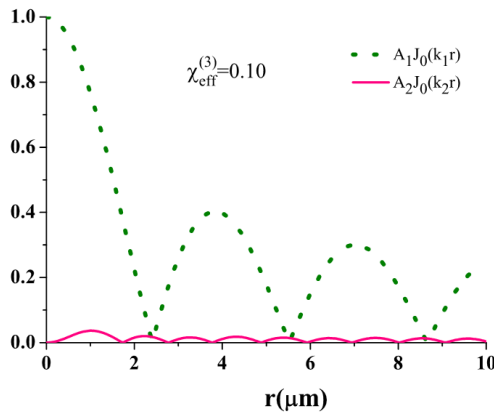
این ویژگی در مورد تابع  $\beta_2$  نیز وجود دارد. شرایط انطباق فازی کامل در حالت تخت برای هارمونیک سوم به صورت  $\Delta k = k(3\omega) - k(\omega) = 0$  است. وقتی این شرط برقرار باشد، موج تولید شده رابطه‌ی فازی ثابتی با قطبش غیرخطی محیط خواهد داشت و می‌تواند انرژی را با بازده زیادی از موج ورودی استخراج کند. پس می‌توان نتیجه گرفت که اولاً شرایط انطباق فازی برای امواج تخت و استوانه‌ای با هم تفاوت دارد و در حالت تولید هارمونیک سوم در محیط استوانه‌ای، این شرایط با توابع  $\beta_1$  و  $\beta_2$  تعیین می‌شود. ثانیاً به دلیل اینکه نمودار تابع  $\beta_1$  بر حسب  $r$  در محیط ناهمگن تقریباً ثابت است، می‌توان گفت که برای رسیدن به انطباق فازی، محیط باید ناهمگن باشد.



**شکل ۱:** تغییرات تابع انطباق فازی  $\beta_1$  در دو محیط همگن و ناهمگن  $\epsilon = 2$ ،  $\omega_1 = 4 \times 10^8 \text{MHz}$ ،  $\omega_2 = 3\omega_1$ ، مشخص است که این تابع در محیط ناهمگن، ثابت است و شرایط انطباق فازی و تولید هارمونیک سوم با بازده بالاتر نسبت به محیط همگن را ایجاد می‌کند.

شکل ۲ دامنه‌ی میدان‌های فرودی و تولیدی را در یک محیط همگن به صورت تابعی از  $r$  (معادلات ۶ و ۷) نشان می‌دهد. از این شکل ملاحظه می‌شود که دامنه‌ی میدان هارمونیک سوم حین انتشار در محیط غیرخطی همگن دارای رفتار نوسانی است که این منجر به کاهش بازده تولید هارمونیک سوم در این گونه محیط‌ها می‌شود. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که به دلیل عدم برآورده شدن شرایط انطباق فازی، بازده هارمونیک سوم خیلی کوچک و دامنه‌ی آن دارای رفتار نوسانی است. در اپتیک غیرخطی برای امواج

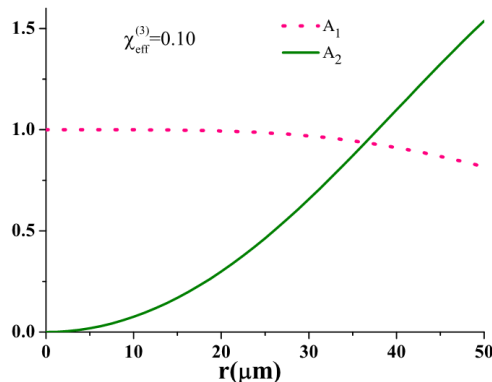
تخت  $\Delta k=0$  متناظر با شرایط انطباق فازی کامل است. زمانی که این شرط برقرار باشد، موج تولید شده دارای رابطه فازی ثابتی با قطبش غیرخطی خواهد بود و در این حالت، محیط غیرخطی می‌تواند موج هارمونیک مرتبه سوم را ایجاد کند که دامنه‌ی آن حین انتشار در محیط، تقویت شود. به عبارتی موج هارمونیک سوم می‌تواند در طول بیشتری در محیط غیرخطی از موج فرودی انرژی دریافت کند و در نتیجه، بازده هارمونیک سوم در شرایط انطباق فازی کامل، خیلی بیشتر است. اگر انطباق فازی برقرار نباشد، شدت و بازده موج تولید شده نسبت به حالت انطباق فازی کامل، خیلی کمتر خواهد بود و تبادل انرژی بین موج فرودی و موج هارمونیک سوم در طول خیلی کوچکی از محیط غیرخطی رخ می‌دهد و بازده هارمونیک سوم در این حالت خیلی کوچک است و رفتار نوسانی سریعی دارد. شرایط انطباق فازی در محیط‌های غیرخطی برای امواج استوانه‌ای، پیچیدگی بیشتری نسبت به حالت امواج تخت دارد.



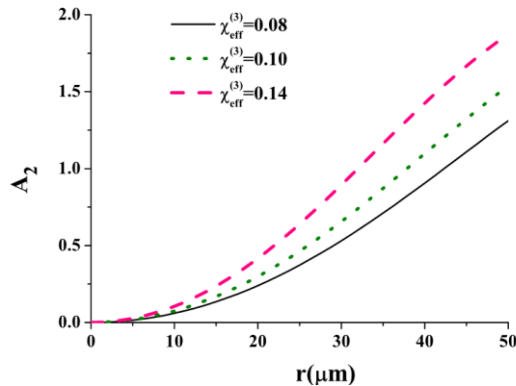
**شکل ۲:** دامنه‌ی میدان فرودی و هارمونیک سوم به صورت تابعی از  $r$  در یک محیط همگن غیرخطی برای  $\omega_1 = 4 \times 10^8 \text{MHz}$  ,  $\omega_2 = 3\omega_1$  ,  $\epsilon = 2$  . نوسانات زیاد دامنه‌ی سومین هارمونیک در محیط همگن نشان می‌دهد که در این محیط نمی‌توان به شرایط انطباق فازی دست پیدا کرد.

در محیط‌های ناهمگن، گذردهی وابسته به مکان است. فرض می‌شود که این وابستگی به صورت  $r^{-2}$  باشد. چنین وابستگی را می‌توان در متمرکز ایجاد کرد [۱۱]. شکل ۳ دامنه‌ی میدان‌های فرودی و تولید شده را در محیط غیرخطی ناهمگن نشان می‌دهد. از این شکل

ملاحظه می شود که حین انتشار موج در این محیط، دامنه‌ی میدان اولیه کاهش و دامنه‌ی هارمونیک سوم افزایش می یابد. همچنین دیده می شود که بر خلاف محیط‌های همگن، در محیط‌های غیرهمگن به دلیل وجود شرایط انطباق فازی، هارمونیک سوم دارای بازده بالا و فاقد رفتار نوسانی است. بنابراین در یک محیط غیرخطی ناهمگن می توان شرایط انطباق فازی را به وجود آورد.



**شکل ۳:** دامنه‌ی میدان فرودی و هارمونیک مرتبه سوم به صورت تابعی از  $r$  در یک محیط ناهمگن غیرخطی با  $\epsilon = 2$ ،  $\omega_1 = 4 \times 10^8 \text{MHz}$ ،  $\omega_2 = 3\omega_1$ ، در محیط ناهمگن، نوسانات دامنه‌ی سومین هارمونیک، بسیار کمتر از محیط همگن (شکل ۲) است و می توان انتظار بازده بالاتری برای این فرایند در محیط ناهمگن داشت.



**شکل ۴:** دامنه‌ی موج هارمونیک سوم به صورت تابعی از  $r$  در یک محیط ناهمگن غیرخطی برای مقادیر مختلف پذیرفتاری غیرخطی مرتبه سوم برای  $\omega_1 = 4 \times 10^8 \text{MHz}$ ،  $\omega_2 = 3\omega_1$ ، با افزایش پذیرفتاری، غیرخطیت در محیط، افزایش یافته و دامنه‌ی موج تولیدی بیشتر می شود.



شکل ۴ تغییرات دامنه‌ی موج هارمونیک سوم را به صورت تابعی از  $I$  برای مقادیر مختلف پذیرفتاری غیرخطی مرتبه سوم در یک محیط ناهمگن نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، هر چه پذیرفتاری محیط بیشتر شود، محیط، غیرخطی‌تر خواهد بود و اندرکنش‌های غیرخطی در آن بهتر انجام می‌شود. بنابراین، بازده اندرکنش در محیط، افزایش می‌یابد و دامنه‌ی موج تولید شده در فرایند غیرخطی ( $A_2$ ) بیشتر می‌شود. پس با افزایش پذیرفتاری، دامنه‌ی هارمونیک سوم افزایش می‌یابد.

### ۳- نتیجه‌گیری

اثر انطباق فاز در تولید هارمونیک مرتبه سوم در محیط‌های غیرخطی همگن و ناهمگن برای امواج استوانه‌ای از حل معادلات موج جفت شده بررسی گردیده است. محاسبات عددی نشان می‌دهد که در محیط‌های همگن به دلیل عدم وجود شرایط انطباق فاز، دامنه‌ی میدان هارمونیک سوم موقع انتشار در محیط، دارای رفتار نوسانی است، اما در محیط‌های ناهمگن به دلیل وجود شرایط انطباق فاز، بازده موج هارمونیک سوم بیشتر است و این موج در چنین محیط‌هایی به خوبی تقویت می‌شود. این نتایج می‌تواند در اپتیک فیبرها، کاربردهای بیناب‌نمایی، انتشار رادیویی و نیز تقویت پارامتریک مورد استفاده قرار گیرد.

### مراجع

- [1] Hao Xiong, Liu-Gang Si, Xiaoxue Yang, Ying Wu, Scientific Reports 5, (2015) 11071.
- [2] Y. R. Shen, Principles of Nonlinear Optics (Wiley, New York, 1984).
- [3] J. Darginavicius, D. Majus, G. Tamo. auskas, A. Dubietis, Journal of Physics, 49, (2009) 171.
- [4] I. Biaggio, P. Kerkoc, L.S. Wu, P. Gunter, B. Zysset, Journal of the Optical Society of America B, 9, (1992) 507.
- [5] Hao Xiong, Liu-Gang Si, Pei Huang, and Xiaoxue Yang, Physical Review E 82, (2010) 057602.
- [6] A.V. Kudrin, E.Yu. Petrov, Journal of Experimental and Theoretical Physics, 110, (2010) 537.

- [7] Hao Xiong, Liu-Gang Si, Chunling Ding, Xiaoxue Yang, and Ying Wu, *Physical Review A* 84, (2011) 043841.
- [8] Hao Xiong, Liu-Gang Si, Jun Feng Guo, Xin-You Lu, and Xiaoxue Yang, *Physical Review A* 83, (2011) 063845.
- [9] R. Kashyap, *Journal of the Optical Society of America B*, 6 (1989), 313.
- [10] N. Vukovic, N. Healy, J. R. Sparks, J. V. Badding, P. Horak, A. C. Peacock, *Scientific Reports* 5, (2015) 11798.
- [11] T. J. Cui, M. Q. Qi, X. Wan, J., Zhao, Q. Cheng, *Light: Science and Applications*, 3, (2014) 218.