

Soliton Solutions Modeling of Generalized Radhakrishnan- Kundu-Lakshmanan Equation

A. Neirameh¹

Submit Date: 2018.07.23
Revise Date: 2019.03.28
Accept Date: 2019.04.07

Abstract

Many problems in physics, mathematics and engineering, fluid mechanics (such as fluid flow, heat transfer, etc.), plasma physics, laser, optics, and many other equations are intrinsically nonlinear. Most of these problems can be decomposed to ordinary differential equations. Except for a limited number of these equations, for which analytical solutions exist, most of them don't have accurate solutions, so that they need to be solved by new methods based on coding with various softwares such as Maple or Matlab. In recent years, an intense research has been done to solve these types of equations, which led to new methods for solving these equations. In this paper, a new generalization for the form of solutions in the convergence method is introduced, using Miep software, to describe the new soliton solutions for the generalized Radhakrishnan, Kundu, Lakshmanan equation. One of the advantages of this method is the variety of solutions obtained, which includes the solutions of these equations with several different methods.

Keywords: Generalized Radhakrishnan, Kundu, Lakshmanan equation, Soliton solutions, wave equation

¹ Minudasht Engineering Faculty, Gonbad Kavous University, Iran.
a.neirameh@gonbad.ac.ir
<https://jap.alzahra.ac.ir/>

مدل سازی جواب های سالی تونی معادله غیر خطی تعمیم یافته رادها کریشان- کاندو- لاکشمین^۱

احمد نیرمه^۲

تاریخ ارسال: ۱۳۹۷/۰۵/۰۱

تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۰۱/۰۸

تاریخ تصویب: ۱۳۹۸/۰۱/۱۸

چکیده

بنیادهای زیادی از مسائل در علوم مختلف از جمله فیزیک و ریاضی و مهندسی به طور ذاتی غیرخطی هستند که آنها را می توان به معادلات دیفرانسیل عادی تجزیه کرد. به جز تعداد محدودی از این معادلات که حل تحلیلی دقیق دارند، بیشتر این مسائل حل دقیق ندارند و باید به وسیله شیوه های جدیدی مبتنی بر کدنویسی بر پایه نرم افزارهایی چون میپل و متلب حل شوند. در سال های اخیر، تحقیقاتی زیادی برای حل این نوع معادلات صورت گرفته است که به روش های جدیدی برای حل این معادلات انجامیده است. در این مقاله بر آنیم تا با استفاده از یک تعمیم جدید برای شکل جواب ها در روش تبدیل بکلانند، با استفاده از نرم افزار میپل جواب های سالی تونی جدیدی برای معادله غیرخطی تعمیم یافته رادها کریشان- کاندو- لاکشمین بیان کنیم. از مزایای این روش می توان به تنوع جواب های حاصل اشاره کرد که در برگزیده جواب های مطرح شده این گونه معادلات با چندین روش مختلف است.

^۱ شناسه دیجیتال (DOI): 10.22051/jap.2019.21375.1099

^۲ استادیار دانشکده فنی و مهندسی مینودشت، دانشگاه گنبد کاووس، ایران؛ a.neirameh@gonbad.ac.ir

واژه‌های کلیدی: معادله غیرخطی رادهاکریشنن-کاندو-لاکشمینن

(Generalized Radhakrishnan, Kundu, Lakshmanan)، جواب‌های سالی‌تونی،

معادله موجی.

۱. مقدمه

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی اغلب از الگوبرداری از قوانین اساسی طبیعت یا تجزیه و تحلیل ریاضی از طیف گسترده‌ای از مسائل موجود در ریاضیات کاربردی و فیزیک ریاضی و علوم مهندسی به وجود می‌آید. اکثر قوانین طبیعی فیزیکی، نظیر معادلات ماکسول، قوانین حرکت نیوتن، معادلات شرودینگر در مکانیک کوانتمی، بر حسب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی قابل بیانند. به عبارت دیگر، این قوانین پدیده‌های فیزیکی را به وسیله ارتباط فضا و مشتقات نسبت به زمان توضیح می‌دهند. وجود مشتقات در این معادلات بیشتر از این جهت است که مشتق‌ها پدیده‌های طبیعی (مانند سرعت، شتاب، نیرو، اصطکاک، شار، شدت جریان) را نمایش می‌دهند. در سال ۲۰۱۲ "یان استوارت" تحقیقات گسترده خود را به صورت کتابی به نام "در تعقیب ناشناخته‌ها: ۱۷ معادله‌ای که دنیا را تغییر داد" منتشر کرد. در کتاب استوارت، اساسی‌ترین معادلات ریاضی، جمع‌آوری شدند و بیشتر از منظر ریاضیات، به جنبه و کاربرد آن‌ها در زندگی انسان نگریسته شده است. استوارت می‌گوید: "معادلات ریاضی گاهی خسته‌کننده و پیچیده به نظر می‌رسند و دلیلش هم این است که با روش‌های پیچیده و خسته‌کننده‌ای بیان شده‌اند." او در ادامه توضیحات خود اضافه می‌کند "هر کسی می‌تواند از زیبایی و اهمیت این معادلات قدردانی کند بدون این که روش حل آن‌ها را بداند. هدف از معرفی این معادلات این است که جایگاه آن‌ها را در زندگی انسان درک کنیم و از جنبه‌های ناگفته و پنهان آن‌ها در تاریخ پرده برداریم." وی خاطر نشان کرد "این معادلات بخش حیاتی و مهم فرهنگ ما هستند. چرا که هریک از آن‌ها داستانی به همراه خود دارند. این داستان‌های جذاب درباره افرادی است که آن‌ها را کشف کرده‌اند و به نوعی شرایط زمانی آن دوران را بیان بازگو می‌کنند." از جمله این ۱۷ معادله می‌توان به معادله ناویر-استوکس، معادله ماکسول، معادله بلک شولز، معادله شرودینگر اشاره کرد که نشاندهنده جایگاه بسیار مهم معادلات در علوم مختلف و پدیده‌های فیزیکی در عالم هستی است.

رد پای معادلات دیفرانسیل را در زمینه‌های مختلف علوم ریاضی، مهندسی، فیزیک و حتی علوم اجتماعی می‌توان یافت، زیرا این معادلات تغییرات را به زبان ریاضی بازگو می‌کنند. از آنجا که در این معادلات، توابع و مشتقات و دیفرانسیل‌ها به یکدیگر پیوند می‌خورند، از آن‌ها می‌توان

برای بیان پدیده‌های دینامیکی و تغییر و تحول بهره گرفت. از شاخه‌هایی از علوم که معادلات دیفرانسیل معمولی در آن‌ها کارکردی اساسی دارند، برای نمونه می‌توان به این موارد اشاره کرد: برخی حوزه‌های ریاضی همچون هندسه، علوم مهندسی همچون مکانیک تحلیلی و مهندسی برق (تحلیل رفتار مدارهای الکتریکی)، زمین‌شناسی (پیش‌بینی آب و هوا)، شیمی (تحلیل زنجیره‌های واکنش هسته‌ای)، زیست‌شناسی (گسترش بیماری‌های عفونی، تغییرات ژنتیکی)، بوم‌شناسی و مدل‌سازی جمعیت و اقتصاد (تغییرات سود و قیمت سهام). بسیاری از ریاضیدانان برجسته تاریخ در حل و بحث معادلات دیفرانسیل معمولی نقش داشته‌اند، از جمله: نیوتن، لایب‌نیتس، خاندان برنولی، ریکاتی، الکسی کلرو، دالامبر، لئونارد اویلر. تاکنون محققین زیادی علاقه‌مندی فراوانی جهت حل این نوع معادلات با مشتقات جزئی غیرخطی با استفاده از روش‌های متنوع در این زمینه مطرح کرده‌اند که از این جمله می‌توان به [۱-۱۸] اشاره نمود. در این مقاله، بر آنیم تا با معرفی تعمیم جدیدی از شکل جواب‌ها در روش تبدیل بکلاند، جواب‌های معادله غیرخطی تعمیم‌یافته رادها کریشان-کاندو-لاکشمین را در زیر [۱۹] به دست آوریم،

$$i \left(Q_t - \lambda \left(|Q|^{2m} Q \right) + \nu Q_{xxx} \right) + a Q_{xx} + b |Q|^{2m} Q = 0,$$

$$0 < m < 2, \quad Q(x, 0) = \frac{A}{\cosh(Bx)}, \quad -\infty < x < \infty \quad (1)$$

که در آن، l, g, a, b, A اعداد حقیقی هستند. روش کار با استفاده از نرم‌افزار میپل است که نرم‌افزاری بسیار قوی و کاربردی برای حل انواع محاسبات مختلف در ریاضی و فیزیک و مهندسی است.

ساختار این پژوهش به این صورت است: در ابتدا ساختار روش مد نظر را مطرح کرده، سپس معادله غیرخطی تعمیم‌یافته رادها کریشان-کاندو-لاکشمین را بیان و با چندین تغییر متغیر موجی، این معادله را به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل کرده و با جاگذاری مشتقات و توان‌های لازم که توسط میپل محاسبه کرده‌ایم، در معادله مد نظر به معادله‌ای با ضرایبی از تابع $F(x)$ با توان‌های مختلف می‌رسیم، که با حل ضرایب فوق در قالب یک دستگاه چند معادله چند مجهولی توسط میپل به ضرایب مد نظر جواب‌ها می‌رسیم.

۲. روش تعمیم‌یافته بکلاند برای معادله ریکاتی

ابتدا، معادله ریکاتی را در نظر می‌گیریم

$$\phi'(\xi) = \sigma + \phi^2(\xi), \quad (2)$$

این معادله جواب هایی به صورت زیر دارد

(۳)

$$\varphi = \begin{cases} -\sqrt{-\sigma} \tanh(\sqrt{-\sigma} \xi), & \sigma < 0, \\ -\sqrt{-\sigma} \coth(\sqrt{-\sigma} \xi), & \sigma < 0, \\ -\frac{1}{\xi + \bar{\omega}}, \bar{\omega} = \text{const.} & \sigma = 0. \\ \sqrt{\sigma} \tan(\sqrt{\sigma} \xi), & \sigma > 0, \\ -\sqrt{\sigma} \cot(\sqrt{\sigma} \xi), & \sigma > 0, \end{cases}$$

جهت بررسی ساختار روش و نحوه استفاده از آن، معادله دیفرانسیل غیر خطی را در حالت کلی

زیر در نظر می گیریم

$$F(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xt}, \dots) = 0, \quad (4)$$

$u = u(x, t)$ تابع هدف است، که نامشخص است و F چند جمله ای بر اساس تابع u و

مشتقات آن بر حسب x, t است. حال برای یافتن جواب های معادله غیر خطی (۳) از تغییر متغیر

موجی زیر

$$u(x, t) = U(x), \quad x = kx + ly + nt, \quad (5)$$

برای تبدیل کردن معادله (۴) به یک معادله دیفرانسیل معمولی غیر خطی به شکل

$$P(U, U', U'', \dots) = 0. \quad (6)$$

استفاده می کنیم که در آن k, l, n مقادیر ثابتند که بعداً محاسبه خواهد شد.

در ادامه، طی چند مرحله نحوه رسیدن به جواب در حالت کلی مطرح خواهد شد.

مرحله اول: فرض می کنیم معادله (۶) جوابی به صورت زیر داشته باشد که ایده اصلی این روش

است،

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^N A_i (\tau + \psi(\xi))^i + \sum_{i=1}^N B_i (\tau + \psi(\xi))^{-i} \quad (7)$$

که در آن A_i, B_i مقادیر ثابتند که محاسبه خواهند شد و $y(x)$ از تبدیل بکلاند برای معادله

ریکاتی از رابطه زیر به دست می آید

(۸)

$$y(x) = \frac{-sB + Dj(x)}{D + B j(x)}$$

که در آن، $y(x)$ در معادله ریکاتی زیر صدق می کند

$$y'(x) = s + y^2(x), \quad (9)$$

در این رابطه B, D مقادیر دلخواه هستند و s مقداری ثابت است که محاسبه خواهد شد و $B \neq 0$ ، در ضمن $z(x)$ دارای جواب مشخص از رابطه (۳) می باشد. جهت تسهیل در به دست آوردن مشتقات معادله (۷) فرض می کنیم

$$F = t + y(x) \quad (10)$$

در نتیجه خواهیم داشت

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^N A_i (F)^i + \sum_{i=1}^N B_i (F)^{-i} \quad (11)$$

در ضمن داریم

$$\psi'(\xi) = \sigma + \psi^2(\xi) \Rightarrow F' = \psi'(\xi) = \sigma + F^2 - 2F\tau + \tau^2 \quad (12)$$

مرحله دوم: با در نظر گرفتن توازن همگن [۶] بین جمله غیرخطی و بالاترین مرتبه مشتق در معادله (۶)، که پس از جاگذاری معادلات (۱۰-۱۲) مقدار عدد صحیح N در معادله (۶) محاسبه می شود.

مرحله سوم: با جاگذاری توانها و مشتقات لازم تابع U در معادله (۴) و مرتب سازی بر اساس توانهای مختلف F و همچنین مساوی صفر قرار دادن ضرایب F به مجموعه ای از عبارتهای جبری می رسیم که با حل این عبارات با استفاده از میل ضرایب لازم A_i, B_i, w و r را به دست می آوریم.

۳. به کارگیری ساختار روش بکلاند برای معادله رادهاکریشان-کاندو-لاکشمینن

در روش مطرح شده جهت تبدیل معادله (۱) به معادله معمولی غیرخطی، تغییر متغیر موجی زیر را در نظر می گیریم

$$Q(x, t) = u(x, t) e^{i(-kx - \omega t + C)} \quad (13)$$

با جاگذاری (۱۳) در (۱) داریم

$$(w + ak^2 + gk^3)u - (b - lk)u^{2m+1} - (a + 3gk)u_{xx} = 0, \quad (14)$$

$$u_t - (2ak + 3gk^2)u - l(2m + 1)u^{2m}u_x - gu_{xxx} = 0,$$

حال با تغییر متغیر $u(x, t) = u(x), x = x + Bt$ در معادله (۱۴) خواهیم داشت

$$(\omega + ak^2 + \gamma k^3)u - (b - \lambda k)u^{2m+1} - (a + 3\gamma k)u'' = 0,$$

$$Bu' - (2ak + 3\gamma k^2)u - \lambda(2m + 1)u^{2m}u' - \gamma u''' = 0, \quad (15)$$

با انتگرال گیری از معادله دوم (۱۵) و هم ارز قرار دادن با معادله اولی روابط زیر را خواهیم داشت

$$a = \frac{-3gk}{3}, \frac{w + ak^2 + gk^3}{B} = \frac{b - lk}{l} = \frac{a + 3gk}{g}. \quad (16)$$

که در آن

$$a = \frac{g(-4kl + b)}{l}, w = \frac{3gk^3l - bgk^2 - Bkl + Bb}{l} \quad (17)$$

با در نظر گرفتن روابط (۱۶) و (۱۷) معادله اول (۱۵) را به صورت زیر خواهیم داشت

$$b_1 u - u^{2m+1} - b_2 u'' = 0, \\ b_1 = \frac{B}{\lambda}, b_2 = \frac{\gamma}{\lambda} \quad (18)$$

با در نظر گرفتن بالانس همگن بین u و u^{2m+1} در معادله (۱۸) داریم $N = \frac{1}{m}$. مجدداً تغییر متغیر $u = v^{\frac{1}{m}}$ را در نظر می گیریم خواهیم داشت

$$b_1 v^2 - v^3 - \frac{b_2(1-p)}{p^2} v'^2 + \frac{b_2}{p^2} v v'' = 0. \quad (19)$$

با در نظر گرفتن توازن همگن بین v^3 و $v v''$ در معادله (۱۹) خواهیم داشت $N = 2$ ، بنابراین طبق رابطه (۷) جواب معادله (۱۹) را در حالت کلی به صورت زیر به دست می آوریم

$$v(x) = A_0 + A_1(m + y(x)) + A_2(m + y(x))^2 + B_1(m + y(x))^{-1} + B_2(m + y(x))^{-2} \quad (20)$$

طبق رابطه (۱۰) با در نظر گرفتن $F = t + y(x)$ و جاگذاری آن در معادله (۲۰) و سپس جاگذاری آن و مشتقات و توان های لازم در معادله (۱۹) با استفاده از محاسبات پیچیده که فقط با نرم افزاری همچون میپل قادر به ساده کردن آن ها هستیم، یکی از حالات جواب را با صفر در نظر گرفتن ضرایب $F^m, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ به صورت زیر خواهیم داشت

$$p = \frac{4}{7}, \\ A_0 = \frac{1}{3} \frac{b_1(3s^2 + 6st^2 + 3t^4 + 3t^2 + 2s)}{(s + t^2)^2}, \quad (21)$$

$$A_1 = -\frac{2b_1 t}{(s + t^2)^2}, \quad A_2 = \frac{B_1}{(s + t^2)^2},$$

$$B_2 = \frac{4}{21} \frac{B_1}{(s + t^2)^2},$$

با جاگذاری ضرایب فوق در رابطه (۲۰) به همراه روابط (۱۳) و (۳) جواب های معادله (۱) را با

تغییر متغیرهای مطرح شده در یک فرایند بازگشتی به صورت زیر خواهیم داشت

$$v(x) = \frac{1}{3} \frac{b_1 (3s^2 + 6st^2 + 3t^4 + 3t^2 + 2s)}{(s+t^2)^2} - \frac{2b_1 t}{(s+t^2)^2} (t+y(x)) + \frac{B_1}{(s+t^2)^2} (t+y(x))^2 + B_1 (t+y(x))^{-1} + \frac{4}{21} \frac{B_1}{(s+t^2)^2} (t+y(x))^{-2}$$

بنابراین داریم

$$u(\xi) = \left[\frac{1}{3} \frac{b_1 (3\sigma^2 + 6\sigma\tau^2 + 3\tau^4 + 3\tau^2 + 2\sigma)}{(\sigma+\tau^2)^2} - \frac{2b_1\tau}{(\sigma+\tau^2)^2} (\tau+\psi(\xi)) + \frac{B_1}{(\sigma+\tau^2)^2} (\tau+\psi(\xi))^2 + B_1 (\tau+\psi(\xi))^{-1} + \frac{4}{21} \frac{B_1}{(\sigma+\tau^2)^2} (\tau+\psi(\xi))^{-2} \right]^{\frac{1}{m}}$$

حال طبق فرایند بازگشتی مطرح شده جواب‌های معادله (۱) را به صورت زیر خواهیم داشت

$$Q(x,t) = \left[\frac{1}{3} \frac{b_1 (3\sigma^2 + 6\sigma\tau^2 + 3\tau^4 + 3\tau^2 + 2\sigma)}{(\sigma+\tau^2)^2} - \frac{2b_1\tau}{(\sigma+\tau^2)^2} (\tau+\psi(\xi)) + \frac{B_1}{(\sigma+\tau^2)^2} (\tau+\psi(\xi))^2 + B_1 (\tau+\psi(\xi))^{-1} + \frac{4}{21} \frac{B_1}{(\sigma+\tau^2)^2} (\tau+\psi(\xi))^{-2} \right]^{\frac{1}{m}} e^{i(-kx - \alpha t + C)}$$

جواب های معادله غیرخطی تعمیم یافته رادها کریشان-کاندو-لاکشمین $s < 0$ برای حالتی که

$$Q_1(x,t) = \left[\frac{1}{3} \frac{B_1 (3\sigma^2 + 6\sigma\tau^2 + 3\tau^4 + 3\tau^2 + 2\sigma)}{(\sigma+\tau^2)^2} - \frac{2B_1\tau}{(\sigma+\tau^2)^2} (\tau - \sqrt{-\sigma} \tanh(\sqrt{-\sigma}(x+Bt))) + \frac{B_1}{(\sigma+\tau^2)^2} (\tau - \sqrt{-\sigma} \tanh(\sqrt{-\sigma}(x+Bt)))^2 + B_1 (\tau - \sqrt{-\sigma} \tanh(\sqrt{-\sigma}(x+Bt)))^{-1} + \frac{4}{21} \frac{B_1}{(\sigma+\tau^2)^2} (\tau - \sqrt{-\sigma} \tanh(\sqrt{-\sigma}(x+Bt)))^{-2} \right]^{\frac{1}{m}} e^{i(-kx - \alpha t + C)}$$

همچنین

$$Q_2(x, t) = \left[\frac{1}{3} \frac{b_1(3\sigma^2 + 6\sigma\tau^2 + 3\tau^4 + 3\tau^2 + 2\sigma)}{(\sigma + \tau^2)^2} - \frac{2b_1\tau}{(\sigma + \tau^2)^2} \left(\tau - \sqrt{-\sigma} \cot h \left(\sqrt{-\sigma} (x + Bt) \right) \right) + \frac{B_1}{(\sigma + \tau^2)^2} \left(\tau - \sqrt{-\sigma} \cot h \left(\sqrt{-\sigma} (x + Bt) \right) \right)^2 + B_1 \left(\tau - \sqrt{-\sigma} \cot h \left(\sqrt{-\sigma} (x + Bt) \right) \right)^{-1} + \frac{4}{21} \frac{B_1}{(\sigma + \tau^2)^2} \left(\tau - \sqrt{-\sigma} \cot h \left(\sqrt{-\sigma} (x + Bt) \right) \right)^{-2} \right]^{\frac{1}{m}} e^{i(-kx - \omega t + C)}$$

برای حالتی که $s > 0$ جواب ها عبارتند از

$$Q_3(x, t) = \left[\frac{1}{3} \frac{b_1(3\sigma^2 + 6\sigma\tau^2 + 3\tau^4 + 3\tau^2 + 2\sigma)}{(\sigma + \tau^2)^2} - \frac{2b_1\tau}{(\sigma + \tau^2)^2} \left(\tau + \sqrt{\sigma} \tan \left(\sqrt{-\sigma} (x + Bt) \right) \right) + \frac{B_1}{(\sigma + \tau^2)^2} \left(\tau + \sqrt{\sigma} \tan \left(\sqrt{-\sigma} (x + Bt) \right) \right)^2 + B_1 \left(\tau + \sqrt{\sigma} \tan \left(\sqrt{-\sigma} (x + Bt) \right) \right)^{-1} + \frac{4}{21} \frac{B_1}{(\sigma + \tau^2)^2} \left(\tau + \sqrt{\sigma} \tan \left(\sqrt{-\sigma} (x + Bt) \right) \right)^{-2} \right]^{\frac{1}{m}} e^{i(-kx - \omega t + C)}$$

و

$$Q_4(x, t) = \left[\frac{1}{3} \frac{b_1(3\sigma^2 + 6\sigma\tau^2 + 3\tau^4 + 3\tau^2 + 2\sigma)}{(\sigma + \tau^2)^2} - \frac{2b_1\tau}{(\sigma + \tau^2)^2} \left(\tau - \sqrt{\sigma} \cot \left(\sqrt{-\sigma} (x + Bt) \right) \right) + \frac{B_1}{(\sigma + \tau^2)^2} \left(\tau - \sqrt{\sigma} \cot \left(\sqrt{-\sigma} (x + Bt) \right) \right)^2 + B_1 \left(\tau - \sqrt{\sigma} \cot \left(\sqrt{-\sigma} (x + Bt) \right) \right)^{-1} + \frac{4}{21} \frac{B_1}{(\sigma + \tau^2)^2} \left(\tau - \sqrt{\sigma} \cot \left(\sqrt{-\sigma} (x + Bt) \right) \right)^{-2} \right]^{\frac{1}{m}} e^{i(-kx - \omega t + C)}$$

و برای حالتی که $s = 0$ جواب‌ها عبارتند از

$$Q_s(x, t) = \left[\frac{1}{3} \frac{b_1 (3\sigma^2 + 6\sigma\tau^2 + 3\tau^4 + 3\tau^2 + 2\sigma)}{(\sigma + \tau^2)^2} - \frac{2B_1\tau}{(\sigma + \tau^2)^2} \left(\tau - \frac{1}{x + Bt + \bar{\omega}} \right) + \frac{b_1}{(\sigma + \tau^2)^2} \left(\tau - \frac{1}{x + Bt + \bar{\omega}} \right)^2 + B_1 \left(\tau - \frac{1}{x + Bt + \bar{\omega}} \right)^{-1} + \frac{4}{21} \frac{B_1}{(\sigma + \tau^2)^2} \left(\tau - \frac{1}{x + Bt + \bar{\omega}} \right)^{-2} \right]^{\frac{1}{m}} e^{i(-kx - \omega t + C)}$$

۴. نتیجه گیری

به طور خلاصه می‌توان گفت که در این پژوهش تعمیم جدیدی برای روش تبدیل بکلاند برای معادله غیرخطی تعمیم یافته رادهاکریشن-کاندو-لاکشمین با موفقیت استفاده شده است. جواب‌های به دست آمده در مقایسه با روش‌هایی چون جیریم جی یا تانزانانت کتانزانانت و خدریاشف، دقیق‌تر و روش مد نظر روشی سازگار و سریع جهت به دست آوردن جواب‌های معادلاتی از این نوع است، که می‌توان برای سایر معادلات با مشتقات جزئی غیرخطی دیگر نیز به کار برد.

مراجع

- [1] M. Alquran, Bright and dark soliton solutions to the Ostrovsky–Benjamin–Bona–Mahony (OS–BBM) equation, *J. Math. Comput. Sci.* 2 (1) (2012) 15.
- [2] H. Rezazadeh, A. Korkmaz, M. Eslami, J. Vahidi, R. Asghari, Traveling wave solution of conformable fractional generalized reaction Duffing model by generalized projective Riccati equation method, *Opt. Quantum. Electron.* 50 (2018) 150.
- [3] M. Eslami, M. Mirzazadeh, B.F. Vajargah, A. Biswas, Optical solitons for the resonant nonlinear Schrödinger's equation with time-dependent coefficients by the first integral method, *Optik* 125 (13) (2014) 3107–3116.
- [4] M. Eslami, F.S. Khodadad, F. Nazari, H. Rezazadeh, The first integral method applied to the Bogoyavlenskii equations by means of conformable fractional derivative, *Opt. Quantum. Electron.* 49 (12) (2017) 391.
- [5] Q. Zhou, M. Ekici, A. Sonmezoglu, M. Mirzazadeh, M. Eslami, Optical solitons with Biswas–Milovic equation by extended trial equation method, *Nonlinear Dyn.* 84 (4) (2016) 1883–1900.
- [6] H. Aminikhah, A.R. Sheikhan, H. Rezazadeh, Sub-equation method for the fractional regularized long-wave equations with conformable fractional derivatives, *Sci. Iran. Trans. B: Mech. Eng.* 23 (3) (2016) 1048.

- [7] M. Eslami, Trial solution technique to chiral nonlinear Schrodinger's equation in (1+ 2)-dimensions, *Nonlinear Dyn.* 85 (2) (2016) 813–816.
- [8] H. Aminikhah, A.H. Sheikhan, H. Rezazadeh, Travelling wave solutions of nonlinear systems of PDEs by using the functional variable method, *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática* 34 (2) (2015) 213–229.
- [9] M. Hubert, G. Betchewe, M. Justin, S.Y. Doka, K.T. Crepin, A. Biswas, Q. Zhou, A.S. Alshomrani, M. Ekici, S.P. Moshokoa, M. Belic, Optical solitons with Lakshmanan–Porsezian–Daniel model by modified extended direct algebraic method, *Optik* 162 (2018) 228–236.
- [10] J. Manafian, M. Foroutan, A. Guzali, Applications of the ETEM for obtaining optical soliton solutions for the Lakshmanan–Porsezian–Daniel model, *Eur. Phys. J. Plus* 132 (11) (2017) 494.
- [11] A. Bansal, A. Biswas, H. Triki, Q. Zhou, S.P. Moshokoa, M. Belic, Optical solitons and group invariant solutions to Lakshmanan–Porsezian–Daniel model in optical fibers and PCF, *Optik* 160 (2018) 86–91.
- [12] A. Biswas, Y. Yildirim, E. Yasar, Q. Zhou, S.P. Moshokoa, M. Belic, Optical solitons for Lakshmanan–Porsezian–Daniel model by modified simple equation method, *Optik* 160 (2018) 24–32.
- [13] A. Biswas, M. Ekici, A. Sonmezoglu, H. Triki, F.B. Majid, Q. Zhou, S.P. Moshokoa, M. Mirzazadeh, M. Belic, Optical solitons with Lakshmanan–Porsezian–Daniel model using a couple of integration schemes, *Optik* 158 (2018) 705–711.
- [14] J. Guzman, R.T. Alqahtani, Q. Zhou, M.F. Mahmood, S.P. Moshokoa, M.Z. Ullah, A. Biswas, M. Belic, Optical solitons for Lakshmanan–Porsezian–Daniel model with spatio-temporal dispersion using the method of undetermined coefficients, *Optik* 144 (2017) 115–123.
- [15] C. Yan, A simple transformation for nonlinear waves, *Phys. Lett. A* 224 (1–2) (1996) 77–84.
- [16] Z. Yan, New explicit travelling wave solutions for two new integrable coupled nonlinear evolution equations, *Phys. Lett. A* 292 (1–2) (2001) 100–106.
- [17] G. Yel, H.M. Baskonus, H. Bulut, Novel archetypes of new coupled Konno–Oono equation by using sine–Gordon expansion method, *Opt. Quantum Electron.* 49 (9) (2017) 285.
- [18] H.M. Baskonus, T.A. Sulaiman, H. Bulut, On the novel wave behaviors to the coupled nonlinear Maccaris system with complex structure, *Optik* 131 (2017) 1036–1043.
- [19] A. Biswas, 1-soliton solution of the generalized Radhakrishnan, Kundu, Lakshmanan equation, *Physics Letters A*, Volume 373, Issue 30, 6 July 2009, Pages 2546–2548