Research Paper

Perturbations on The Energy Levels of Electron in The Penning Trap, Due to The Dirac Equation[1]

Alameh Hajimohammdi-Fariman [2], Ahmad Shariati[*3] and Mohammad Khorrami [4]

Received: 2022.10.23
Revised: 2023.01.28
Accepted: 2023.02.27

Abstract

The penning trap, invented in 1959 by H. Dehmelt, is a combination of an inner electric dipole field and a constant magnetic field. A charged particle trapped in the Penning trap is called a geonium atom. The energy levels of the geonium atom are known in the non-relativistic limit, using the solutions of the Schrodinger equation, and for the case when the gravitational field of the Earth is negligible. In this article we write the Dirac equation for the geonium atom, coupled to the weak gravitational field of the Earth, and study its energy levels using perturbation techniques. If the Newtonian gravitational potential is φ, the dimensionless perturbing parameter is $\frac{3\varphi^2}{c^2} \sim 2\times10^{-9}$, where c is the velocity of light. It is found that the effect of these perturbations affects the energy levels by a factor of almost 3×10^{-10}. This tiny shift in the energy levels may be used to investigate the effect of the gravitational field on earth.

Keywords: *Pening Trap, Dirac Equation, Geonium Atom.*

---

[1] DOI: 10.22051/ijap.2023.42101.1303
[2] PhD Student, Department of Physics, Faculty of Physics, Alzahra University, Tehran, Iran. Email: a.hajimohamadi@alzahra.ac.ir
[3]Associate Professor, Department of Physics, Faculty of Physics, Alzahra University, Tehran, Iran. (Corresponding Author). Email: shariati@mailaps.org
[4] Professor, Department of Physics, Faculty of Physics, Alzahra University, Tehran, Iran. Email: mamwad@alzahra.ac.ir

مقالهٔ پژوهشی

بررسی اختلال روی ترازهای انرژی الکترون در تله پنینگ، ناشی از معادله دیراک[1]

عالمه حاجی محمدی فریمان[2]، احمد شریعتی*[3] و محمد خرمی[4]

فصلنامهٔ علمی فیزیک کاربردی ایران
دانشکدهٔ فیزیک، دانشگاه الزهرا
سال سیزدهم، پیاپی ۳۳، تابستان ۱۴۰۲
صص ۲۰ - ۳۰

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۰۸/۰۱
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۱۱/۰۸
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۱۲/۰۸

چکیده:
تله‌ی پنینگ که در سال ۱۹۵۹ توسط دملت اختراع شد، ترکیبی از یک میدان دو قطبی الکتریکی درونی و یک میدان مغناطیسی یکنواخت است. ذره بارداری که در تله پنینگ به دام می‌افتد به اتم ژئونیوم موسوم است. ترازهای انرژی اتم ژئونیوم، در حد غیرنسبیتی، با استفاده از حل‌های معادله شرودینگر و برای موردی که میدان گرانشی زمین قابل چشم‌پوشی است، مشخص شده است. در این مقاله معادله‌ی دیراک را برای اتم ژئونیوم که در میدان گرانشی زمین است، نوشته و ترازهای انرژی آن را با استفاده از روش اختلال مطالعه می‌کنیم. اگر پتانسیل گرانشی نیوتنی را φ در نظر بگیریم، پارامتر اختلالی بدون بعد $\frac{3\varphi^2}{c^2} \sim 2\times10^{-9}$ خواهد بود که در آن c سرعت نور است. نتایج نشان می‌دهد که اثر این اختلال روی ترازهای انرژی به اندازه‌ی یک فاکتور تقریبی 3×10^{-10} است. این انتقال ناچیز در ترازهای انرژی می‌تواند برای بررسی اثر میدان گرانشی زمین در نظر گرفته شود.

واژگان کلیدی: *تله پنینگ، معادله دیراک، اتم ژئونیوم.*

---

[1] DOI: 10.22051/ijap.2023.42101.1303
[2] دانشجوی دکترا، دانشکده فیزیک، دانشگاه الزهرا، تهران، ایران. Email: a.hajimohamadi@alzahra.ac.ir
[3] دانشیار، دانشکده فیزیک، دانشگاه الزهرا، تهران، ایران. (نویسندهٔ مسئول). Email: shariati@mailaps.org
[4] استاد، دانشکده فیزیک، دانشگاه الزهرا، تهران، ایران. Email: mamwad@alzahra.ac.ir

۱. مقدمه

آثار میدان گرانشی اجسام بزرگی مانند زمین روی سامانه‌های کوانتومی، بسیار مورد توجه است. موریشیما[1] و همکاران استدلال کردند که یکی از آثار اندازه‌پذیر می‌تواند نسبت ژیرومغناطیس ذره‌ای چون الکترون باشد که در یک تله‌ی پنینگ به دام افتاده است [۱]. این اثر بسیار ناچیز و از مرتبه‌ی $\frac{3\varphi}{c^2} \sim 2\times10^{-9}$ می‌باشد که $\varphi = GM_{Earth}R_{Earth}^{-1}$ پتانسیل گرانشی در سطح زمین و c سرعت نور است. اندازه‌گیری چنین اثر ناچیزی نیازمند آگاهی از ترازهای انرژی تله‌ی پنینگ در آن مرتبه است. به تازگی، البریخت[2] و همکاران تحلیلی نظری از اتم ژئونیوم با متریک ریندلر را گزارش کرده‌اند [۲]. در گزارش آن‌ها انرژی‌های گذار برای تصحیح‌های نسبیتی تا مرتبه‌ی c^{-2} استفاده شده است. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد که گرانش نیوتنی تنها به انتقال ثابتی از ترازهای انرژی ژئونیوم منتهی می‌شود. بنابراین گرانش نیوتن روی بسامدهای گذار اندازه‌گیری شده اثری ندارد. به جای آن، آثار نسبیتی از مرتبه‌ی c^{-2} به انتقال‌های نسبیتی ترازهای انرژی منجر می‌شود. به تازگی، گزارشی کامل درمورد بررسی آثار گرانش روی اتم ژئونیوم منتشر شده است [۳]. ما در این مقاله اختلال روی ترازهای انرژی تله‌ی پنینگ را به کمک معادله دیراک بررسی می‌کنیم.

۲. مروری بر مورد غیرنسبیتی

در تله‌ی پنینگ یک ذره باردار چون الکترون در یک میدان مغناطیسی یکنواخت $\vec{B} = B\hat{k}$ و یک میدان الکتریکی دو قطبی $\vec{E} = \frac{E_0}{a}\left(x\hat{i} + y\hat{j} - 2z\hat{k}\right)$ در ناحیه محدودی از فضا حرکت می‌کند [۴، ۵ و۶]. در اینجا a مقیاس طول است. اغلب بسامد سیکلوترون به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\omega_c = 2\pi\nu_c = \frac{eB}{M}. \tag{۱}$$

در این رابطه M جرم الکترون و e اندازه (قدر مطلق) بار الکترون است.

مقدار بسامد نوعی در یک میدان مغناطیسی $B = 5.7T$ برای یک الکترون برابر $\nu_c = 160GHz$ خواهد شد. اکنون پتانسیل برداری را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\vec{A} = \frac{1}{2}B\left(x\hat{j} - y\hat{i}\right). \tag{۲}$$

[1] Morishima
[2] Ulbricht

میدان الکتریکی را نیز می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\vec{E} = \frac{M\,\omega_z^2}{-2e}\left(x\hat{i} + y\hat{j} - 2z\hat{k}\right), \tag{۳}$$

که در آن، ω_z پارامتری با بعد بسامد زاویه‌ای است. از این رابطه، به ازای $\nu_z = 64MHz$ و $\omega_z = 2\pi\nu_z$ خواهیم داشت $E \sim 460kVm^{-1}$.

پتانسیل الکتریکی برابر است با:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{M\,\omega_z^2}{-4e}\left(2z^2 - x^2 - y^2\right). \tag{۴}$$

هامیلتونی غیرنسبیتی ذره‌ی بدون اسپین برابر است با [۳]:

$$H = H_{xy} + H_z . \tag{۵}$$

در این رابطه، H_z هامیلتونی یک نوسانگر هماهنگ ساده با $\hbar\omega_z = 270neV$، برابر است با:

$$H_z = \frac{p_z^2}{2M} + \frac{1}{2}\omega_z^2 z^2 . \tag{۶}$$

همچنین، H_{xy} هامیلتونی یک نوسانگر هماهنگ همسانگرد دو بعدی با عبارت اضافی L_z است (L_z مؤلفه‌ی اندازه حرکت زاویه‌ای مداری است).

$$H_{xy} = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2M} + \frac{1}{2}\Omega^2\left(x^2 + y^2\right) + \frac{1}{2}\omega_c L_z , \tag{۷}$$

و

$$\Omega = \frac{1}{2}\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2} . \tag{۸}$$

برای مقادیر معرفی شده بالا داریم $\hbar\Omega = 335558neV$. می‌توان عملگرهای نردبانی را به شکل زیر تعریف کرد:

$$a_x = \sqrt{\frac{M\,\Omega}{2\hbar}}x + \frac{i}{\sqrt{2\hbar M\,\Omega}}p_x , \tag{۹}$$

$$a_y = \sqrt{\frac{M\,\Omega}{2\hbar}}y + \frac{i}{\sqrt{2\hbar M\,\Omega}}p_y . \tag{۱۰}$$

برحسب این عملگرها، هامیلتونی به شکل زیر می‌شود:

$$H_{xy} = \hbar\Omega\left(N_x + N_y + 1\right) + \frac{1}{2}\omega_c L_z , \tag{۱۱}$$

که در اینجا، $N_x = a_x^\dagger a_x \quad , \quad N_y = a_y^\dagger a_y$ عملگرهای شمارنده متداول هستند. اکنون با استفاده از عملگرهای نردبانی، عملگرهای زیر معرفی می‌شوند:

$$a_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_x - ia_y\right) \quad , \quad a_- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_x + ia_y\right) \tag{۱۲}$$

به سادگی می‌توان نشان داد که عملگرهای a_+ و a_-، عملگرهای نردبانی جابه‌جاپذیر هستند یعنی:

$$\left[a_+, a_-\right] = 0. \tag{۱۳}$$

همچنین، می‌توان مشاهده کرد که $N_x + N_y = N_+ + N_-$ و $L_z = \hbar\left(N_+ - N_-\right)$ هستند، از این رو داریم:

$$H_{xy} = \hbar\Omega\left(N_+ + N_- + 1\right) + \frac{1}{2}\hbar\omega_c\left(N_+ - N_-\right). \tag{۱۴}$$

معادله‌ی ویژه مقداری این هامیلتونی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} H_{xy}\varphi_{n_+,n_-} &= \left\{\hbar\Omega\left(n_+ + n_- + 1\right) + \frac{\hbar}{2}\left(n_+ - n_-\right)\omega_c\right\}\varphi_{n,m} \\ &= \hbar\left\{\left(\Omega + \frac{1}{2}\omega_c\right)n_+ + \left(\Omega - \frac{1}{2}\omega_c\right)n_- + \Omega\right\}\varphi_{n,m} \\ &= \hbar\left\{\left(n_+ + \frac{1}{2}\right)\omega_+ - \left(n_- + \frac{1}{2}\right)\omega_-\right\}\varphi_{n,m} \end{aligned} \tag{۱۵}$$

در رابطه (۱۵)، n_+ و n_- ویژه مقادیر N_+ و N_- هستند و

$$\omega_+ = \frac{1}{2}\left(\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}\right), \tag{۱۶}$$

$$\omega_- = \frac{1}{2}\left(\omega_c - \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}\right). \tag{۱۷}$$

در اینجا مهم است که توجه شود با شرط $\omega_z < \omega_c$ آنگاه می‌توان نوشت:

$$\omega_+ > \omega_c \quad , \quad \omega_- < \frac{\omega_z^2}{2\omega_c} \tag{۱۸}$$

هامیلتونی که تا اینجا در نظر گرفته شد بدون در نظر گرفتن اسپین الکترون بوده است، برای الکترون حقیقی باید جمله‌ی زیر را اضافه کرد:

$$H_{spin} = -\frac{g}{2}\frac{q}{M}\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}.\vec{B} \rightarrow E_{spin} = \hbar\frac{g}{2}\omega_c\frac{1}{2}\sigma_z , \tag{۱۹}$$

که در اینجا،

$$\omega_s = \frac{g}{2}\omega_c \quad , \quad \nu_s = \frac{\omega_s}{2\pi}. \qquad (۲۰)$$

و ضریب g نسبت ژیرومغناطیس الکترون است که از معادلهٔ دیراک $g=2$ را داریم. بنابراین ترازهای انرژی یک الکترون در تله‌ی پنینگ برابر است با:

$$H_0 := E_{n_+,n_-,n_z} = \hbar\Omega\left(N_+ + N_- + 1\right) + \hbar\omega_z\left(N_z + \frac{1}{2}\right) - \frac{\hbar\omega_c}{2}\left(N_- - N_+ + \sigma_z\right) \qquad (۲۱)$$

که $\left(n_+, n_-, n_z, s\right)$ اعداد کوانتومی بوده و اغلب مقدار n_+, n_-, n_z برابر $\{0,1,2,\ldots\}$ و مقدار s برابر $\{+1,-1\}$ است. جدول زیر پارامترهای انرژی را برای یک الکترون در میدان مغناطیسی $B = 5.7T$ و بسامد $\nu_z = 64MHz$ نشان می‌دهد.

جدول ۱ پارامترهای انرژی الکترون در یک تله‌ی پنینگ، با میدان مغناطیسی $B = 5.7T$ و بسامد $\nu_z = 64MHz$.

پارامتر انرژی	neV
$\hbar w_c$	671116
$\hbar\Omega$	335558
$\hbar w_z$	265
$\hbar w_-$	0.052

۳. معادله دیراک برای یک الکترون در تله‌ی پنینگ

اسپینور دیراک را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\psi = \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} \qquad (۲۲)$$

چنانچه بخواهیم آثار نسبیتی را مطالعه کنیم باید معادله‌ی دیراک مربوطه را نوشته و ترازهای انرژی را به دست آوریم. در نمایش دیراک داریم [۷]:

$$\beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad , \quad \alpha = \begin{bmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix}. \qquad (۲۳)$$

در این نمایش معادله دیراک برای ذره‌ای با بار q در یک میدان الکترومغناطیسی $\left(A^0,\vec{A}\right)$ برابر است با:

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\vec{\sigma}.\vec{\pi}\chi-eA^0\varphi+Mc^2\varphi, \tag{۲۴}$$

$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t}=\vec{\sigma}.\vec{\pi}\varphi-eA^0\varphi+Mc^2\chi, \tag{۲۵}$$

که در این معادله‌ها، $A^0=\varphi$ پتانسیل الکتریکی، $\vec{A}$ پتانسیل برداری، $\vec{\pi}=\vec{p}+e\vec{A}$ اندازه حرکت سینماتیکی و p اندازه حرکت کانونیک است. برای ویژه حالت انرژی عبارت $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ را با انرژی E جایگزین می‌کنیم و پس از حذف مؤلفه‌ی کوتاه χ، بدست می‌آید:

$$E\,\Phi=\left[-e\varphi+\vec{\sigma}.\left(\vec{p}+e\vec{A}\right)\tfrac{c^2}{2Mc^2+E+e\varphi}\vec{\sigma}.\left(\vec{p}+e\vec{A}\right)\right]\Phi \tag{۲۶}$$

که در آن، E انرژی غیرنسبیتی است (بخشی که شامل انرژی سکون نیست) و

$$\begin{aligned}-e\varphi&=\frac{M\,\omega_z^2}{4}\left(2z^2-x^2-y^2\right)\\ -e\vec{A}&=\frac{M\,\omega_c}{2}\hat{z}\times\vec{r}\end{aligned} \tag{۲۷}$$

با بسط سمت راست معادله (۲۶) تا مرتبه‌ی c^{-2} خواهیم داشت:

$$E\,\Phi=\left[H_0+H_1+O\left(c^{-4}\right)\right]\Phi, \tag{۲۸}$$

که در اینجا،

$$H_0=-e\varphi+\frac{\left[\vec{\sigma}.\left(\vec{p}+e\vec{A}\right)\right]^2}{2M}, \tag{۲۹}$$

$$H_1=-\frac{\left[\vec{\sigma}.\left(\vec{p}+e\vec{A}\right)\right]\left(E+e\varphi\right)\left[\vec{\sigma}.\left(\vec{p}+e\vec{A}\right)\right]}{4M^2c^2}. \tag{۳۰}$$

همچنین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}H_0&=\frac{\vec{p}.\vec{p}}{2M}+\frac{M\,\Omega^2}{2}\left(x^2+y^2\right)+\frac{M\,\omega_z^2}{2}z^2+\frac{\omega_c}{2}\left(L_z+\hbar\sigma_z\right)\\ &=\hbar\Omega\left(N_++N_-+1\right)+\hbar\omega_z\left(N_Z+\frac{1}{2}\right)+\frac{\hbar\omega_c}{2}\left(N_+-N_-+\sigma_z\right).\end{aligned} \tag{۳۱}$$

تصحیح نسبیتی ترازهای انرژی تا مرتبه‌ی c^2 برابر مقدار چشمداشتی H_1 است. شیوه‌ای دیگر برای یافتن این نتیجه، این است که H_1 را بر حسب عملگرهای نردبانی بنویسیم؛

(۳۲)

$$H_1 = -\frac{(E+e\varphi)\left[\vec{\sigma}.\left(\vec{p}+e\vec{A}\right)\right]^2+\left[\vec{\sigma}.\left(\vec{p}+e\vec{A}\right)\right]^2(E+e\varphi)}{8M^2c^2}$$
$$-\frac{\left[\vec{\sigma}.\left(\vec{p}+e\vec{A}\right),(E+e\varphi)\right]\left[\vec{\sigma}.\left(\vec{p}+e\vec{A}\right)\right]}{8M^2c^2}$$
$$+\frac{\left[\vec{\sigma}.\left(\vec{p}+e\vec{A}\right)\right]\left[\vec{\sigma}.\left(\vec{p}+e\vec{A}\right),(E+e\varphi)\right]}{8M^2c^2}$$
$$=-\frac{(E+e\varphi)(H_0+e\varphi)+(H_0+e\varphi)(E+e\varphi)}{4Mc^2}-\frac{\left[\vec{\sigma}.\left(\vec{p}+e\vec{A}\right).\left[\vec{\sigma}.\vec{p},-e\varphi\right]\right]}{8M^2c^2}.$$

از این‌رو؛

$$H_1 = H_1' + H_1'' + ZE, \tag{۳۳}$$

که،

$$H_1' = -\frac{(E+e\varphi)^2}{2Mc^2}, \tag{۳۴}$$

$$H_1'' = \frac{i\hbar\left[\vec{\sigma}.\left(\vec{p}+e\vec{A}\right),\vec{\sigma}.\vec{\nabla}(-e\varphi)\right]}{8M^2c^2}, \tag{۳۵}$$

و ZE مقدار چشمداشتی عبارتی است که ویژه حالت H_0 را با ویژه مقدار E حذف می‌کند. در ادامه برای H_1'' می‌توان نوشت:

$$H_1'' = \frac{i\hbar}{8M^2c^2}\left\{\left[\sigma^j,\sigma^k\right]\left[\partial_k(-e\varphi)\right]\left(p_j+eA_j\right)+\frac{1}{8M^2c^2}\sigma^j\sigma^k\left[\left(p_j+eA_j\right),\partial_k(-e\varphi)\right]\right\} \tag{۳۶}$$
$$=\frac{i\hbar}{8M^2c^2}\left\{-2i\,\vec{\sigma}.\left[\vec{\nabla}(-e\varphi)\right]\times\left(\vec{p}+e\vec{A}\right)-i\hbar\sigma^j\sigma^k\partial_j\partial_k(-e\varphi)\right\}$$

از آنجایی که لاپلاسی φ برابر صفر است، عبارت دوم در معادله پایانی حذف می‌شود. برای عبارت نخست باید توجه داشت که از میان ماتریس‌های پائولی تنها σ_z مقدار چشمداشتی غیرصفر برای ویژه بردارهای H_0 دارد. بدین ترتیب:

$$H_1'' = \frac{\hbar\sigma_z \hat{z}.\left[\vec{\nabla}_\perp\left(-e\varphi\right)\times\left(\vec{p}_\perp + e\vec{A}\right)\right]}{4Mc^2} + ZE\,,$$
$$H_1'' = \frac{\hbar\sigma_z}{4Mc^2}\frac{M\omega_z^2}{2}\left[L_z + \frac{M\omega_c}{2}\left(x^2+y^2\right)\right] + ZE\,. \quad (۳۷)$$

می‌توان نوشت:

$$x^2+y^2 = \frac{\hbar}{M\Omega}\left(a_+a_- + a_+^\dagger a_-^\dagger + N_+ + N_- + 1\right), \quad (۳۸)$$

$$z^2 = \frac{\hbar}{2M\omega_z}\left(a_z^2 + a_z^{\dagger 2} + 2N_z + 1\right). \quad (۳۹)$$

بنابراین؛

(۴۰)

$$\begin{aligned}H_1' = -\frac{1}{2Mc^2}\Bigg(& E^2 - 2E\frac{M\omega_z^2}{4}\left[\frac{\hbar}{M\omega_z}\left(2N_z+1\right) - \frac{\hbar}{M\Omega}\left(N_+ + N_- + 1\right)\right] \\ & + \left(\frac{M\omega_z^2}{4}\right)^2\Bigg\{\left(\frac{\hbar}{M\omega_z}\right)^2\left[\left(2N_z+1\right)^2 + 2\left(N_z^2 + N_z + 1\right)\right] \\ & + \left(\frac{\hbar}{M\omega_z}\right)^2\left[\left(N_+ + N_- + 1\right)^2 + 2N_+N_- + N_+ + N_- + 1\right] \\ & - \frac{2\hbar^2}{M^2\omega_z\Omega}\left(2N_z+1\right)\left(N_+ + N_- + 1\right)\Bigg\}\Bigg) + ZE\end{aligned}$$

$$H_1'' = -\frac{\hbar^2\omega_z^2\sigma_z}{8Mc^2}\left[N_+ - N_- + \frac{\omega_c}{2\Omega}\left(N_+ + N_- + 1\right)\right] + ZE\,. \quad (۴۱)$$

به شکل خلاصه داریم:

$$H = H_0 + H_1 + ZE \quad (۴۲)$$

$$H_0 = \hbar\Omega\left(N_+ + N_- + 1\right) + \hbar\omega_z\left(N_z + \frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar\omega_c}{2}\left(N_- - N_+ + \sigma_z\right) \quad (۴۳)$$

$$H_1 = -\frac{1}{2Mc^2}\Bigg(E^2 - 2E\frac{M\omega_z^2}{4}\left[\frac{\hbar}{M\omega_z}\left(2N_z+1\right)-\frac{\hbar}{M\Omega}\left(N_+ + N_- + 1\right)\right]$$
$$+\left(\frac{M\omega_z^2}{4}\right)^2\left\{\left(\frac{\hbar}{M\omega_z}\right)^2\left[\left(2N_z+1\right)^2+2\left(N_z^2+N_z+1\right)\right]\right.$$
$$+\left(\frac{\hbar}{M\Omega}\right)^2\left[\left(N_+ + N_- + 1\right)^2 + 2N_+N_- + N_+ + N_- + 1\right]$$
$$\left.-\frac{2\hbar^2}{M^2\omega_z\Omega}\left(2N_z+1\right)\left(N_+ + N_- + 1\right)\right\}\Bigg) + ZE$$
$$= -\frac{\hbar^2\omega_z^2\sigma_z}{8Mc^2}\left[N_+ - N_- + \frac{\omega_c}{2\Omega}\left(N_+ + N_- + 1\right)\right] + ZE \qquad (۴۴)$$

که می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$E = E_0 + E_+n_+ + E_-n_- + E_zn_z + E_ss + E_{++}n_+^2 + E_{--}n_-^2 + E_{zz}n_z^2 + E_{ss}s^2 + E_{+-}n_+n_-$$
$$+E_{z+}n_+n_z + E_sn_+s + E_{z-}n_-n_z + E_sn_-s + E_{zs}n_zs \qquad (۴۵)$$

که در آن s به ویژه مقادیر σ_z اشاره دارد و

$$E_0 = \hbar\Omega + \frac{1}{2}\hbar\omega_z = 335690.5neV\ , \qquad (۴۶)$$

$$E_+ = \hbar\Omega + \frac{1}{2}\hbar\omega_c = 671116neV\ , \qquad (۴۷)$$

$$E_- = \hbar\left(\Omega - \frac{1}{2}\omega_c\right) = \hbar\left(\frac{1}{2}\frac{\omega_z^2}{\omega_c}\right) = 0.0520neV\ , \qquad (۴۸)$$

$$E_z = \hbar\omega_z = 256neV\ , \qquad (۴۹)$$

$$E_s = -\frac{1}{2}\hbar\omega_c = -335558neV\ , \qquad (۵۰)$$

$$E_{++} = \frac{-\hbar^2}{2Mc^2}\left(\omega_c^2 - \omega_z^2\right) = -4.503\times10^{-4}\,neV\ , \qquad (۵۱)$$

$$E_{--}=\frac{\hbar^2\omega_z^4}{8Mc^2\omega_c^2}=2\times10^{-11}neV\ , \qquad (۵۲)$$

$$E_{zz}=\frac{\hbar\omega_z^2}{2Mc^2}=7.0225\times10^{-11}neV\ , \qquad (۵۳)$$

$$E_{ss}=\frac{-1}{2Mc^2}\frac{1}{4}\left(\hbar\omega_c\right)^2=\frac{-\left(\hbar\omega_c\right)^2}{8Mc^2}=-1.12\times10^{-4}neV\ , \qquad (۵۴)$$

$$E_{\pm}=\frac{-1}{2Mc^2}\left[2\hbar^2\Omega^2-\frac{1}{2}\hbar^2\omega_c^2\right]-\frac{\hbar^2\omega_z^4}{8Mc^2\Omega^2}=-1.13\times10^{-17}neV\ , \qquad (۵۵)$$

$$E_{z+}=\frac{-1}{2Mc^2}\left[\left(\hbar\Omega\right)\left(\hbar\omega_z\right)+\left(\hbar\omega_z\right)\left(\frac{1}{2}\left(\hbar\omega_c\right)\right)\right]=-1.76\times10^{-7}neV\ , \qquad (۵۶)$$

$$E_{z-}=\frac{-1}{2Mc^2}\left[\left(\hbar\Omega\right)\left(\hbar\omega_z\right)+\left(\hbar\omega_z\right)\left(-\frac{1}{2}\hbar\omega_c\right)\right]+\frac{\hbar^2\omega_z^3}{8Mc^2\Omega}=-1.38\times10^{-4}neV\ , \qquad (۵۷)$$

$$E_{s+}=\frac{-1}{2Mc^2}\left(\hbar\Omega\times\left(-\frac{1}{2}\hbar\omega_c\right)\right)=1.10\times10^{-4}neV\ , \qquad (۵۸)$$

$$E_{s-}=\frac{-1}{2Mc^2}\left(\hbar\Omega\times\left(-\frac{1}{2}\hbar\omega_c\right)\right)=1.10\times10^{-4}neV\ , \qquad (۵۹)$$

$$E_{zs}=\frac{-1}{2Mc^2}\left(\left(\hbar\omega_z\right)\times\left(-\frac{1}{2}\hbar\omega_c\right)\right)=0.88\times10^{-7}neV\ . \qquad (۶۰)$$

باید توجه داشت که $s^2=1$ و $E_{ss}s^2$ ثابت است (به اضافه E_0). همچنین، عبارت ثابت در گذارها مشاهده‌پذیر نیست به صورتی که می‌توانیم آن‌ها را کاهش دهیم. از این رو، مهمترین عبارت‌ها برابرند با:

$$E=n_+E_++sE_s+n_zE_z+n_-E_-+n_+^2E_{++}+n_-^2E_{--}+s\left(n_+E_{s+}+n_-E_{s-}\right) \qquad (۶۱)$$

۴. نتیجه‌گیری

معادله دیراک برای یک الکترون در تله‌ی پنینگ موسوم به اتم ژئونیوم به اختلال ترازهای انرژی منتهی شد و ترازهای انرژی مختل نشده با حل معادله شرودینگر که از اسپین برخوردار است، بدست آمده است. گذار مرتبط با فاکتور g الکترون، اسپین بالا به اسپین پایین یا گذار $s=1\rightarrow s=-1$ است. از معادله (۶۱) برای این گذار بدست می‌آوریم:

$$\Delta E = 2\left[E_{\_}s + n_{-} + E_{\_}\left(\hat{s}+\right) + n_{-} - E_{\_}\left(\hat{s}-\right)\right] = \Delta E_{-0} + \Delta E_{-1} = -671\mu eV + \left(n_{+} + n_{-}\right) peV\ . \qquad (۶۲)$$

نسبت $\frac{\Delta E_1}{\Delta E_0} = \frac{E_s}{E_{s+}} = 0.3\times 10^{-9}$ را می‌توان ملاحظه کرد که با مقادیر واحد برای n_+ و n_- بدست آمده است. این نتیجه کمابیش یک مرتبه‌ی بزرگی از سهم گرانشی $2\times 10^{-9} \sim \frac{3\varphi}{c^2}$ [۱] کوچک‌تر است ($\varphi = GM_{Earth}R_{Earth}^{-1}$ پتانسیل گرانشی روی سطح زمین است).

۵. تقدیر و تشکر

بدین‌وسیله از دانشگاه الزهرا تهران به دلیل حمایت‌های بی‌دریغ سپاسگزاری می‌گردد.

منابع

[1] Morishima, Takahiro, Toshifumi Futamase, and Hirohiko M. Shimizu. "The general relativistic effects on the magnetic moment in Earth’s gravity." *Progress of Theoretical and Experimental Physics* 2018(6), 063B07, 2018.

[2] Ulbricht, S., R. A. Müller, and A. Surzhykov. "Gravitational effects on geonium and free electron g s-factor measurements in a Penning trap." *Physical Review D* 100(6), 064029, 2019.

[3] Ito, Asuka. "Inertial and gravitational effects on a geonium atom." *Classical and Quantum Gravity* 38(19), 195015, 2021.

[4] Brown, Lowell S., and Gerald Gabrielse. "Geonium theory: Physics of a single electron or ion in a Penning trap." *Reviews of Modern Physics* 58(1), 233, 1986.

[5] Dehmelt, Hans. "Experiments with an isolated subatomic particle at rest." In *AIP Conference Proceedings*, 233(1), 28-45. American Institute of Physics, 1991.

[6] Dehmelt, Hans. "Less is more: experiments with an individual atomic particle at rest in free space." *American Journal of Physics* 58(1), 17-27, 1990.

[7] Itzykson, C., and J. B. Zuber. "Quantum field theory (4th printing 1988) c McGraw–Hill.", 1980.