

Research Paper

Study of the Level Density and Thermodynamic Quantities for $^{256}\text{Cf}_{98}$ and $^{290}\text{Fl}_{114}$ Heavy and Superheavy Isotopes based on TD(P- E_{shell})-BSFGM Considering the Effects of Spin, Parity, Rotation and Vibration¹

Asghar Khooy^{*2} and Mohammadreza Pahlavani³

Received: 2024.03.03

Revised: 2024.05.17

Accepted: 2024.09.07

Abstract

Nuclear level density is a critical parameter in nuclear physics as it represents the number of energy levels per unit of energy (MeV) in a nucleus. This study calculates the level density and level density parameter for heavy and super heavy isotopes $^{256}\text{Cf}_{98}$ and $^{290}\text{Fl}_{114}$ based on the back-shifted Fermi gas method. The level density parameter is determined through a semi-classical approach using the nuclear Woods-Saxon potential. This research investigates the influence of pairing energy, and temperature-dependent shell effects on level density and thermodynamic quantities such as entropy, nuclear temperature, and nuclear-specific heat. Furthermore, the research explores the effects of nuclear spin, parity, rotational, and vibrational motion on these quantities. A graphical representation is used to illustrate the variations in nuclear level density, entropy, temperature, and specific heat as a function of nuclear excitation energy, highlighting the influence of nuclear spin, parity, and rotational and vibrational motions on them. The results show that considering these effects leads to changes in the parameters studied without altering the overall trends. Additionally, a specific heat diagram demonstrates the effects of vibrational and rotational motions, spin and parity effects, shell effects, and temperature-dependent pairing energy on excitation energy, revealing the breaking of the first nucleon pair at energies of $E=2.948$ MeV and $E=3.04$ MeV for isotopes $^{256}\text{Cf}_{98}$ and $^{290}\text{Fl}_{114}$, respectively.

Keywords: *Level Density, Thermodynamic Quantities, Temperature, Entropy, Heat Capacity.*

¹ <https://doi.org/10.22051/ijap.2024.46594.1394>

² PhD Student, Department of Nuclear Physics, Faculty of Basic Science, University of Mazandaran, Iran. (Corresponding Author). Email: asghar.khooy@gmail.com

³ Professor, Department of Nuclear Physics, Faculty of Basic Science, University of Mazandaran, Iran. Email: m.pahlavani@umz.ac.ir



مطالعه چگالی تراز و کمیت‌های ترمودینامیکی ایزوتوپ‌های سنگین و فوق سنگین $^{256}\text{Cf}_{98}$ و $^{290}\text{Fl}_{114}$ بر پایه $\text{TD}(\text{P}-\text{E}_{\text{shell}})$ BSFGM- با در نظر گرفتن اثرات اسپینی، پاریته، چرخشی و ارتعاشی^۱

اصغر خوی^{۲*} و محمدرضا پهلوانی^۳

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۲/۱۳

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۰۲/۲۸

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۶/۱۷

فصلنامه علمی فیزیک کاربردی ایران

دانشکده فیزیک، دانشگاه الزهرا

سال چهاردهم، پیاپی ۳۹، زمستان ۱۴۰۳

صص ۶۸ - ۸۵

چکیده:

تعداد ترازهای انرژی در واحد انرژی (MeV) یعنی چگالی تراز هسته از کمیت‌های کلیدی در فیزیک هسته‌ای است. این پژوهش بر محاسبه چگالی تراز و کمیت چگالی تراز با استفاده از روش گاز فرمی جابه‌جا شده برای ایزوتوپ‌های سنگین و فوق سنگین $^{256}\text{Cf}_{98}$ و $^{290}\text{Fl}_{114}$ متمرکز شده است. کمیت چگالی تراز با استفاده از روش نیمه کلاسیکی و استفاده از پتانسیل وودز-ساکسون محاسبه شده است. اثرات انرژی زوجیت و اثرات پوسته وابسته به دما بر چگالی تراز و کمیت‌های ترمودینامیکی همانند آنتروپی، دمای هسته و گرمای ویژه هسته مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین اثرات در نظر گرفتن اسپین و پاریته هسته و حرکت‌هایی همچون دوران و نوسان هسته بر این کمیت‌ها بررسی شده است. نمودار تغییرات چگالی تراز هسته، آنتروپی هسته، دمای هسته و گرمای ویژه هسته به صورت تابعی از انرژی تحریکی هسته برای نشان دادن تأثیر اسپین، پاریته، حرکت‌های دورانی و نوسانی هسته بر این کمیت‌ها رسم شده است. همان گونه که این منحنی‌ها نشان می‌دهند، در نظر گرفتن این اثرات سبب تغییر در این کمیت‌ها می‌گردد، هرچند روند کلی منحنی‌ها را تغییر نمی‌دهد. همچنین نمودار تغییرات گرمای ویژه تحت اثرات ارتعاشی و چرخشی و اثرات اسپینی و پاریته و اثرات پوسته و انرژی زوجیت وابسته به دما به صورت تابعی از انرژی برانگیختگی به خوبی شکسته شدن اولین جفت نوکلئونی را که به ترتیب در انرژی‌های $E=3.04 \text{ MeV}$ و $E=2.948 \text{ MeV}$ برای ایزوتوپ‌های $^{256}\text{Cf}_{98}$ و $^{290}\text{Fl}_{114}$ رخ می‌دهد، نشان می‌دهد. **واژگان کلیدی:** چگالی تراز، کمیت‌های ترمودینامیکی، آنتروپی، دما، ظرفیت گرمایی.

^۱ <https://doi.org/10.22051/ijap.2024.46594.1394>

^۲ دانشجوی دکترا، گروه فیزیک هسته‌ای، دانشکده علوم پایه، دانشگاه مازندران. (نویسنده مسئول) Email: asghar.khooy@gmail.com

^۳ استاد، گروه فیزیک هسته‌ای، دانشکده علوم پایه، دانشگاه مازندران. Email: asghar.khooy@gmail.com



۱. مقدمه

هسته اتم سامانه‌ای مکانیک کوانتومی چندجسمی و پیچیده است. به صورتی که یک توصیف کامل از ساختار هسته به داده‌هایی در مورد توابع موج هسته‌ای و ترازهای انرژی هسته نیازمند است. اگرچه ویژگی‌های بسیاری از اندرکنش قوی هسته‌ای به خوبی شناخته شده است، اما هنوز برای بیان برخی از ویژگی‌های آن به مدل‌های هسته‌ای نیازمندیم. مدل لایه‌ای میدان متوسط [۱] و انواع توسعه یافته آن برای هسته‌های تغییر شکل یافته و مدل‌های مبتنی بر تنوری چندجسمی [۲] دو گروه مهم برای استخراج ترازهای انرژی تک‌ذره‌ای، توابع موج نوکلئون‌های داخل هسته و مطالعه رفتار تجمعی هسته‌ها می‌باشند.

به صورت کلی چگالی تراز هسته را به دو روش مستقیم و غیرمستقیم می‌توان محاسبه کرد. در روش مستقیم از مدل گاز فرمی^۱ (FGM) و مدل گاز فرمی جابه‌جایی^۲ (BSFGM)، مدل دمای ثابت^۳ (CTM)، مدل ابرشاره تعمیم یافته^۴ (GSM) [۳-۵] و روش‌هایی مانند مدل لایه‌ای مونت کارلو^۵ [۶]، روش بردین-کوپر-اسچریفر^۶ [۷] و همچنین با استفاده از تقریب ایستایی و تقریب فاز تصادفی^۷ [۸] چگالی تراز هسته را به صورت غیرمستقیم و از راه قوانین ترمودینامیک کلاسیک به صورت مستقیم می‌توان بدست آورد.

بررسی تنوری چگالی تراز برای اولین بار در سال ۱۹۳۶ توسط هانس بته آغاز شد [۹]. در روش محاسباتی هانس هسته به صورت گاز فرمیونی غیر برهمکنشی در نظر گرفته شده و فرض شده بود که فرمیون‌ها در مدارهایی بافاصله یکسان از هم قرار دارند [۱۰]. هانس بته برای بررسی وابستگی سرعت واکنش‌های هسته‌ای به چگالی تراز هسته‌ای یک سری از آزمایشات را ترتیب داد. داده‌های تجربی اندازه‌گیری شده به وسیله وی از چگالی تراز هسته‌ای در ناحیه نزدیک به ترازهای زمینه هسته‌ای یا انرژی فرمی قرار داشت که براساس داده‌های ناشی از فاصله تشدید نوترون جمع‌آوری شده بود. ولی در محاسبات وی اثراتی مانند جفت‌شدگی، اثرات پوسته، اثرات پارینه، اثرات اسپینی و اثرات دیگر در نظر گرفته نشده بود، در صورتی که می‌دانیم این اثرات نقش اساسی در تعیین چگالی تراز و انرژی برانگیختگی دارند. همچنین اثرات بیان شده سبب می‌شود که رابطه چگالی تراز مدل گاز فرمی را با تعریف انرژی برانگیختگی مؤثر که در آن E_1 به عنوان انرژی

¹ Fermi Gas Model

² Back-Shifted Fermi Gas Model

³ Constant Temperature Model

⁴ Generalized Superfluid Model

⁵ Shell model Monte Carlo

⁶ Bardeen-Cooper-Schrieffer

⁷ Static path plus random phase approximation



جابه‌جایی می‌باشد، اصلاح نموده و به‌عنوان مدل گاز فرمی جابه‌جا شده بیان کنند. این مدل افزون بر پارامتر جابه‌جایی انرژی برانگیختگی E_1 ، کمیت چگالی تراز a را نیز به‌عنوان ضرایب قابل تنظیم تعریف می‌کند. کمیت چگالی تراز یکی از کمیت‌های اساسی در مدل گاز فرمی و مدل گاز فرمی جابه‌جا شده می‌باشد. روش‌های مختلفی برای محاسبه کمیت چگالی تراز وجود دارد. یکی از این روش‌ها محاسبه کمیت چگالی تراز از راه چگالی تراز تک ذره‌ای است، به صورتی که آن را با استفاده از روش نیمه کلاسیکی می‌توان محاسبه نمود. بعد از هانس بته افراد زیادی چون گیلبرت، کامرون، ایگناتاک و غیره و گروه اسلو روش‌ها و مدل‌های مختلفی برای محاسبه چگالی تراز ایجاد کردند.

یک روش جدید برای استخراج چگالی تراز هسته‌ای با استفاده از تابع قدرت تابش گاما که بر پایه تابش‌های اولیه گاما بدست می‌آید به‌وسیله آزمایش‌ها گروه اسلو گزارش شده است. یکی از مهم‌ترین کاربردهای چگالی تراز هسته‌ای محاسبه سطح مقطع برهمکنش‌های هسته‌ای بر اساس روش هاووزر- فشباخ است. این روش به‌ویژه برای محاسبه سطح مقطع برهمکنش‌های مرتبط با تحول و تکامل ستاره‌گان مانند ابرنواخترها، ستاره‌گان نوترونی و نابودی ستارگان جفت فشرده مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مدل دمای ثابت (CTM) در حقیقت مدلی برای تعیین چگالی ترازهای هسته‌ای است که دانشمندان تجربی از آن استفاده می‌کنند. در این مدل برای این که بتوان برای داده‌های تجربی رابطه‌ای تئوری در نظر گرفت، با نگاه به نمودارهای تجربی چگالی تراز برحسب انرژی برانگیختگی متوجه شدند که داده‌های تجربی یک رفتار نمایی از خود نشان می‌دهند، بنابراین رابطه‌ی نمایی که هماهنگی خوبی نیز با داده‌های تجربی دارند برای آن تعریف می‌کنند. این مدل شامل دو کمیت است: کمیت جابه‌جایی انرژی حالت پایه E_0 و T دمای هسته.

مدل ابرشاره تعمیم‌یافته (GSM) با توجه به مدل همبستگی جفت‌شدگی ابررسانا (BCS) تعریف شده است. این مدل ماکروسکوپی بر اساس گذار فاز از رفتار ابرشاره در انرژی پایین که در آن اثر جفت‌شدگی، به‌شدت بر روی چگالی تراز اثر می‌گذارد، تعریف می‌شود. این مدل در انرژی بالا معمولاً توسط مدل گاز فرمی توصیف می‌شود و در انرژی‌های پایین رفتار همانند دمای ثابت دارد. فرمول کلی برای بیان چگالی تراز کل در مدل ابرشاره تعمیم‌یافته دو نوع تعریف دارد. در زیر و در بالای انرژی بحرانی.



مدل‌هایی که با انرژی زوجیت سروکار دارند وابستگی دمایی برای آن در نظر می‌گیرند. برای مثال مدل قطره مایعی وابسته به دما وابستگی دمایی را برای هامیلتونی هسته در نظر می‌گیرند، به صورتی که این مدل (BCS) کاهش در انرژی زوجیت برحسب دما را پیشنهاد می‌کند. این نکته در مدل گاز فرمی جابه‌جایی از قبل وارد نشده بود. گذارهای فازی برای توصیف ویژگی‌های گرمایی و افت‌وخیزهای آماری مناسب به نظر می‌رسند؛ بنابراین با استفاده از فرمول وابسته به دما برای پارامتر جابه‌جایی انرژی، مدل جابه‌جایی گاز فرمی بدون هیچ کمیت تطبیق‌پذیری بدست می‌آید.

چگالی تراز تک ذره‌ای^۱ کمیتی مهم در تئوری ساختار هسته‌ای است. روش‌های مختلفی برای محاسبه چگالی تراز تک ذره‌ای به صورت عددی معرفی شده‌اند. روش شیف‌فازی، روش تابع گرین و تقریب نیمه کلاسیکی برخی از آن‌ها هستند. روش نیمه کلاسیکی یکی از روش‌هایی است که به صورت گسترده‌ای برای محاسبه چگالی تراز تک ذره‌ای مورد استفاده قرار گرفته است. این روش بر اساس بسط نیمه کلاسیکی تابع پارش تک ذره‌ای محاسبه می‌شود. با استفاده از مقادیر انرژی فرمی پروتونی و نوترونی چگالی تراز تک ذره‌ای در انرژی فرمی را در این روش مشخص می‌کند.

کمیت چگالی تراز یکی از کمیت‌های مهم مدل‌های گاز فرمی و مدل گاز فرمی جابه‌جا شده است که با استفاده از تقریب نیمه کلاسیکی و از راه چگالی تراز تک ذره‌ای در انرژی فرمی محاسبه می‌شود. با استفاده از فرمول‌های برازش شده مختلفی که برای این کمیت داده شده است، مدل گاز فرمی جابه‌جا شده به مدلی با تنها یک کمیت تطبیق‌پذیر تبدیل شده است.

از چگالی تراز در محاسبه کمیت‌های ترمودینامیکی هسته‌ها و محاسبه سطح مقطع واکنش‌ها نیز می‌توان استفاده نمود. کمیت‌های ترمودینامیکی هسته مانند آنتروپی، دمای هسته و ظرفیت گرمایی را با استفاده از چگالی تراز هسته می‌توان محاسبه کرد؛ و از راه محاسبه ظرفیت گرمایی هسته شکسته شدن اولین جفت نوکلئونی را نیز می‌توان مشاهده نمود.

برای اعتبارسنجی نتایج بدست آمده از محاسبات مربوط به چگالی تراز بعضی از هسته‌ها از داده‌های تجربی گروه اسلو (OSLO) استفاده می‌شود [۱۱-۱۲]. روش گروه اسلو (OSLO) تنها روشی است که در آن برای استخراج توان تابشی گاما و چگالی تراز، تنها به یک آزمایش بسنده شده است و از راه طراحی تنها یک آزمایش این کمیت محاسبه می‌گردد. اساس کار در این روش بر پایه‌ی اندازه‌گیری طیف انرژی برانگیختگی هسته‌ها با استفاده از گذارهای تابشی گاما ناشی از چند واکنش گذار یا به کمک واکنش پراکندگی کشسان است. نتیجه چنین اندازه‌گیری‌هایی تشکیل ماتریس

^۱ Single-particle level density

تصادفی تابش گاما است. این ماتریس تصادفی تابش گاما میانگین انرژی برانگیختگی هسته‌های باقی‌مانده و میانگین انرژی گذارهای اشعه گاما است که ترازهایی را که انرژی آن‌ها نزدیک به انرژی برانگیختگی است، از حالت برانگیختگی خارج می‌کند.

گذارهای اشعه گامای گسیل‌شده از راه انرژی برانگیختگی مشخص شده داده‌هایی را درزمینه‌ی چگالی تراز در انرژی برانگیختگی هسته که واپاشی می‌کند و درباره تابع توان گسیل اشعه گاما در انرژی اشعه گاما که برابر با اختلاف دو مقدار انرژی برانگیختگی اولیه و نهایی $E_{\gamma} = E_i - E_f$ است، بدست می‌دهد [۱۳].

همان‌طوری که بیان شد برای اعتبارسنجی نتایج بدست آمده از محاسبات چگالی تراز بعضی از هسته‌ها از داده‌های تجربی گروه اسلو (OSLO) استفاده می‌شود. ولی به دلیل فقدان چگالی تراز تجربی، برای ایزوتوپ‌های سنگین و فوق سنگین $^{256}\text{Cf}_{98}$ و $^{290}\text{Fl}_{114}$ پارامتر جابه‌جایی انرژی تنها کمیت تطبیق‌پذیر رابطه چگالی تراز است و به صورتی مشخص می‌شود که نتایج منطقی برای ویژگی‌های گرمایی هر هسته بدست آید و شکستن اولین جفت نوکلئونی در انرژی $2\Delta_0$ قابل مشاهده باشد.

در پژوهش‌های پیشین در محاسبه چگالی تراز با استفاده از مدل گاز فرمی جابه‌جا شده دو یا سه مورد از اثراتی مانند جفت‌شدگی، اثرات پوسته، اثرات پارته، اثرات اسپینی و اثرات دیگر در نظر گرفته می‌شد. در این پژوهش افزون بر در نظر گرفتن اثرات بیان شده، این اثرات با وابستگی دمایی در نظر گرفته شده است. بدین ترتیب مدل گاز فرمی جابه‌جا شده اصلاح شده و سایر کمیت‌های ترمودینامیکی از راه چگالی تراز اصلاح شده محاسبه می‌گردد. در آینده نیز می‌توان کمیت‌های دیگری که بر چگالی تراز تأثیر می‌گذارند را نیز به مدل گاز فرمی جابه‌جا شده اضافه کرد و نتایج جدیدتر و دقیق‌تری را پیش‌بینی کرد. مدل گاز فرمی جابه‌جا شده در انرژی‌های بالاتر نتایج خوبی برای چگالی تراز و کمیت‌های ترمودینامیکی پیش‌بینی می‌کنند.

در قسمت محاسبات نظری روابط مربوط به اثرات پارته و اثرات اسپینی و اثرات ارتعاشی و چرخشی و همچنین روابط مربوط به اثرات پوسته و اثرات جفت‌شدگی که روی چگالی تراز تأثیر دارند به صورت خلاصه بیان شده است.

۲. محاسبات نظری و تجزیه و تحلیل نتایج

فرمول چگالی تراز هسته در مدل BSFGM با یک پارامتر آزاد به صورت زیر بیان می‌شود [۱۴]:



$$\rho(U)_{\text{BSFGM}} = \frac{1}{12\sqrt{2}} \frac{\exp\left(2\sqrt{aU}\right)}{\sigma a^{\frac{1}{4}} U^{\frac{5}{4}}} \quad (1)$$

که

$$U = E(T) - \Delta(T) - E_{\text{shell}}(T) - E_1 \quad (2)$$

که در آن، a و σ و U و $E(T)$ ، E_1 و $\Delta(T)$ و $E_{\text{shell}}(T)$ به ترتیب کمیت چگالی تراز، کمیت قطع اسپین، انرژی برانگیختگی مؤثر، انرژی برانگیختگی، کمیت جابه‌جایی انرژی، انرژی زوجیت و اثرات پوسته وابسته هستند. هر کدام از کمیت‌های بیان شده به روش‌هایی که در ادامه توضیح داده شده، محاسبه و در رابطه (۱) جایگذاری شده است.

کمیت قطع اسپین^۱ (σ) را با استفاده از رابطه زیر می‌توان محاسبه نمود [۱۵]،

$$\sigma^2 = 0.0146A^{\frac{5}{3}} \frac{1 + \sqrt{1 + 4a(U)}}{2a} \quad (3)$$

و اثرات پوسته وابسته به دما^۲ ($E_{\text{shell}}(T)$) را با استفاده از رابطه زیر می‌توان محاسبه نمود [۱۶-۱۷]،

$$E_{\text{shell}}(T) = M - M_{\text{LDM}} \quad (4)$$

M جرم اندازه‌گیری شده هسته و M_{LDM} جرم محاسبه شده هسته در مدل قطره مایعی است و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$M_{\text{LDM}} = \Delta M_{\text{LDM}} + A$$

و

$$\Delta M_{\text{LDM}} = M_n N + M_p Z + E_{\text{vol}} + E_{\text{sur}} + E_{\text{coul}} + \Delta(T) \quad (5)$$

M_p و M_n و E_{vol} و E_{sur} و E_{coul} و $\Delta(T)$ به ترتیب جرم نوترون و جرم پروتون در واحد انرژی مگا الکترون‌ولت و انرژی حجمی و سطحی و کولنی و انرژی زوجیت وابسته به دما هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند،

$$E_{\text{vol}} = -c_1 A$$

¹ Spin cutoff parameter

² Temperature dependent shell effects

³ Liquid drop model



$$E_{\text{sur}} = c_2 A^{\frac{2}{3}}$$

$$E_{\text{coul}} = c_3 \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - c_4 \frac{Z^2}{A}$$

(۶)

و

$$c_i = b_i \left[1 - k \left(\frac{N-Z}{A} \right)^2 \right], i = 1, 2$$

$$b_1 = 15.677 \text{ MeV}, b_2 = 18.56 \text{ MeV}, k = 1.79, c_3 = 0.717 \text{ MeV}, c_4 = 1.21129 \text{ MeV}$$

همچنین انرژی زوجیت با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود [۱۸-۱۹]،

$$\Delta_0 = \begin{cases} \Delta_{0n} + \Delta_{0p} & \text{for } Z \text{ and } N \text{ even} \\ \Delta_{0p} & \text{for } Z \text{ even and } N \text{ odd} \\ \Delta_{0n} & \text{for } N \text{ even and } Z \text{ odd} \\ 0 & \text{for } Z \text{ and } N \text{ odd} \end{cases}$$

(۷)

Δ_{0p} و Δ_{0n} نیز به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\Delta_{0n} = \frac{r}{N^{\frac{1}{3}}} \exp \left[-s \left(\frac{N-Z}{A} \right) - t \left(\frac{N-Z}{A} \right)^2 \right]$$

$$\Delta_{0p} = \frac{r}{Z^{\frac{1}{3}}} \exp \left[s \left(\frac{N-Z}{A} \right) - t \left(\frac{N-Z}{A} \right)^2 \right]$$

(۸)

ضرایب r, s, t در محاسبات با مقادیر $r=5.72$ و $s=1.18$ و $t=8.12$ در نظر گرفته شده‌اند.

همچنین انرژی زوجیت وابسته به دما^۱ ($\Delta(T)$) به صورت زیر تعریف می‌گردد [۲۰]،

$$\Delta(T) = \frac{\Delta_0}{1 + e^{\left(\frac{T}{.03} - \frac{7.37}{0.03\sqrt{A}} \right)}}$$

(۹)

با استفاده از فرمول مدل گاز فرمی جابجایی، انرژی زوجیت وابسته به دما و اثرات پوسته وابسته به

دما داریم [۲۱]:

¹ Temperature-dependent pairing energy



$$\frac{1}{T} = \frac{ds}{dE} = \frac{d \ln(\rho)}{dE} = \left(\sqrt{\frac{a}{U} - \frac{3}{4U}} \right) \frac{dU}{dE} \quad (10)$$

که

$$\frac{dU}{dE} = 1 - \frac{d\Delta(T)}{dE} - \frac{dE_{\text{shell}}(T)}{dE} = 1 - \left(\frac{d\Delta(T)}{dT} + \frac{dE_{\text{shell}}(T)}{dT} \right) \frac{dT}{dE} \quad (11)$$

و از جایگذاری رابطه (۱۱) در رابطه (۱۰)، رابطه (۱۲) بدست می‌آید:

$$\frac{1}{T} = \left(\sqrt{\frac{a}{U} - \frac{3}{4U}} \right) \left[1 - \left(\frac{d\Delta(T)}{dT} + \frac{dE_{\text{shell}}(T)}{dT} \right) \right] \frac{dT}{dE} \quad (12)$$

درحالی که مدل گاز فرمی ساده انرژی برانگیختگی به صورت تابعی از دما به صورت زیر تعریف می‌گردد،

$$E(T) = aT^2 \quad (13)$$

برای حل معادله (۱۲) مجموعه‌ای از چند جمله‌ای‌های تا توان ۳ به صورت زیر در نظر گرفته شد:

$$E(T) = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3 \quad (14)$$

ضرایب a_0 و a_1 و a_2 و a_3 با جایگذاری $E(T)$ از معادله بالا در معادله (۱۲) در هر بازه کوچک دمایی بدست می‌آیند. سپس با استفاده از این ضرایب انرژی به صورت تابعی از دما محاسبه می‌گردد. در این مدل رابطه مربوط به پارامتر چگالی تراز^۱ با استفاده از رابطه زیر نشان داده می‌شود [۱۴]:

$$a(U, A) = \bar{a} \left[1 + \frac{1 - \exp(-\gamma U)}{U} E_{\text{shell}}(T) \right] \quad (15)$$

که در آن،

$$\gamma = \left(\frac{0.35}{A^{\frac{1}{3}}} \right) \text{MeV}^{-1}$$

و

¹ Level density parameter

$$\bar{a} = \frac{\pi^2}{6} g \quad (16)$$

که

$$g = g_n(\epsilon_F^n) + g_p(\epsilon_F^p) \quad (17)$$

در این رابطه $g_n(\epsilon_F^n)$ و $g_p(\epsilon_F^p)$ به ترتیب چگالی تراز تک ذره‌ای نوترونی و پروتونی در انرژی فرمی می‌باشد. چگالی تراز تک ذره‌ای با استفاده از رابطه نیمه تجربی زیر محاسبه می‌گردد،

$$g = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \int dr r^2 \sqrt{\epsilon - V(r)} \theta(\epsilon - V(r)) \quad (18)$$

در این رابطه $V(r)$ پتانسیل مؤثر و m جرم تک ذره‌ای نوترون و یا پروتون و $\theta(x)$ تابع پله‌ای است. پتانسیل وودز-ساکسون^۱ به‌عنوان پتانسیل اندرکنش هسته‌ای به‌صورت زیر تعریف می‌گردد [۲۲]،

$$V_{ws}(r, \theta) = \frac{V_0}{1 + e^{(r - R(\theta))/d_s}} \quad (19)$$

که، R و d_s به ترتیب شعاع، کمیت پخشیدگی سطحی و V_0 عمق چاه پتانسیل هسته‌ای می‌باشند که با استفاده از روابط زیر محاسبه می‌گردند:

$$R(\theta) = 1.17 + [1 + \beta_2 Y_{20}] R_h \quad (20)$$

$$d_s = 0.5 + 0.33I$$

$$R_h = (1.00 + 0.39I) A^{\frac{1}{3}}$$

$$I = \frac{N - Z}{A}$$

$$V_0 = -49.6 [1 \pm 0.86I] (\text{MeV})$$

در این رابطه، علامت “+” برای پروتون و علامت “-” برای نوترون در نظر گرفته شده است. همچنین پتانسیل کولنی برای یک هسته با تغییر شکل محوری با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

¹ Woods-Saxon potential



$$V_c(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ze^2}{r} \left[1 + \frac{3R^2(\theta)}{5r^2} \beta_2 Y_{20} \right] \quad (21)$$

که در آن، β_2 کمیت تغییر شکل چهار قطبی است [۲۳]. چگالی تراز وابسته به اسپین و پارامتر به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\rho(U, J, \pi) = P(U, J, \pi) R(U, J) \rho(U)_{\text{BSFGM}} \quad (22)$$

به ترتیب تابع توزیع پارامتر و اسپینی می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌گردند [۲۴-۲۵]،

$$P(U, J, \pi) = \frac{1}{2} \quad (23)$$

$$R(U, J) = \frac{2J+1}{2\sigma^2} \exp \left[-\frac{\left(J + \frac{1}{2} \right)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (24)$$

همچنین روابط مربوط به اثرات چرخشی و ارتعاشی به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$K_{\text{rot}} = 0.01389A^{\frac{5}{3}} \left(1 + \frac{\beta_2}{3} \right) * \sqrt{\frac{U}{a}} \quad (25)$$

$$K_{\text{vib}} = \exp \left(0.0555A^{\frac{2}{3}} \left(\frac{U}{a} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \quad (26)$$

در نهایت چگالی تراز کل به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\rho^{\text{total}} = K_{\text{vib}} K_{\text{rot}} \rho(U, J, \pi) \quad (27)$$

که با جایگذاری در رابطه اصلی مربوط به مدل فرمی جابه‌جا شده با انرژی زوجیت وابسته به دما به رابطه نهایی زیر برای چگالی تراز منتهی می‌شود:

$$\rho^{\text{total}} = \exp \left(0.0555A^{\frac{2}{3}} \left(\frac{U}{a} \right)^{\frac{2}{3}} \right) * 0.01389A^{\frac{5}{3}} \left(1 + \frac{\beta_2}{3} \right) \sqrt{\frac{U}{a}} * \frac{1}{2}$$

$$* \frac{2J+1}{2\sigma^2} \exp \left[-\frac{\left(J + \frac{1}{2} \right)^2}{2\sigma^2} \right] * \frac{1}{12\sqrt{2}\sigma} \frac{\exp\left(2\sqrt{(aU)}\right)}{a^{\frac{1}{4}} U^{\frac{5}{4}}} \quad (28)$$

آنتروپی با چگالی تراز هسته‌ای رابطه‌ای به صورت زیر دارد:

$$S = K_B \ln \frac{\rho}{\rho_0} \quad (29)$$

در حالی که، ρ_0 ثابت نرمالیزاسیون است که با استفاده از قانون سوم ترمودینامیک آن را می‌توان محاسبه نمود. دمای هسته با آنتروپی آن رابطه‌ای به صورت زیر دارد،

$$T = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)^{-1} \quad (30)$$

و ظرفیت گرمایی را با استفاده از فرمول زیر می‌توان محاسبه نمود،

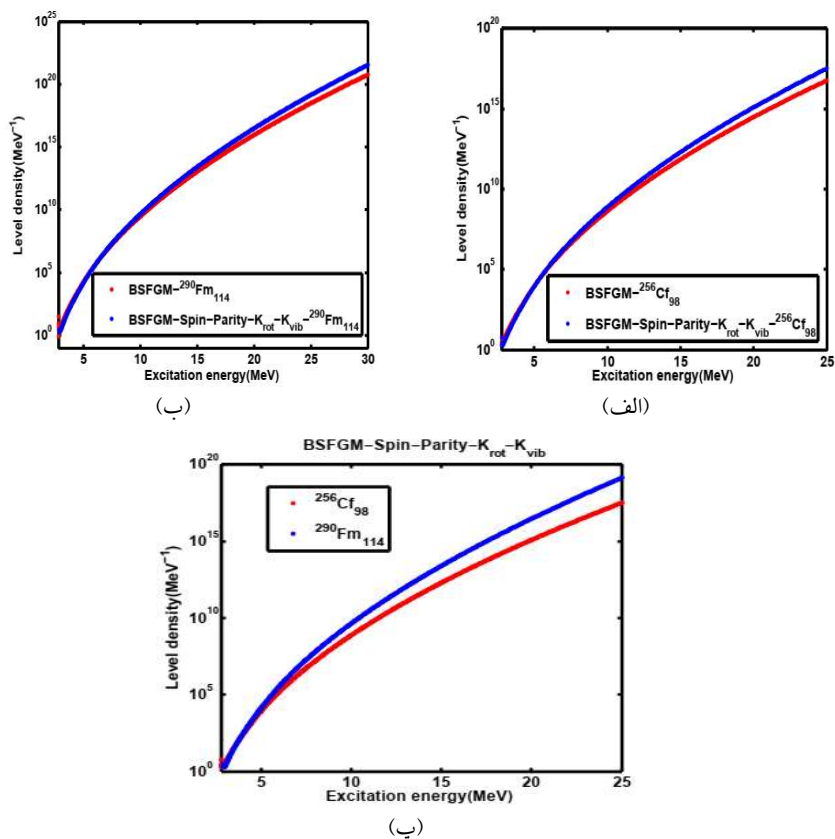
$$C_V = \left(\frac{\partial T}{\partial E} \right)^{-1} \quad (31)$$

جدول ۱. مقادیر بهینه به دست آمده برای پارامترهای موجود در مدل گاز فرمی جابجا شده BSFGM

ایزوتوپ	\bar{a}	Δ_0	E_{sh}	β_2	E_1
$^{256}\text{Cf}_{98}$	24.644	1.474	0.882	0.240	0.399
$^{290}\text{Fl}_{114}$	29.88	1.52	-0.0611	-0.011	1.403

در شکل (۱- الف و ب) چگالی تراز ایزوتوپ‌های سنگین و فوق سنگین $^{256}\text{Cf}_{98}$ و $^{290}\text{Fl}_{114}$ محاسبه شده با استفاده از مدل گاز فرمی جابجا جایی $TD(P - E_{shell}) - BSFGM$ به همراه کمیت چگالی تراز وابسته به دما با چگالی تراز محاسبه شده برای این ایزوتوپ‌ها با در نظر گرفتن اثرات ارتعاشی و چرخشی و اثرات پاریتته و اسپینی آمده است. همچنین در نمودار (۱- پ) با در نظر گرفتن این اثرات مقایسه شده‌اند. این مقایسه نشان می‌دهد که هرچند روند کلی تغییرات چگالی تراز با در نظر گرفتن این اثرات و بدون در نظر گرفتن آن‌ها با انرژی تحریکی روند یکسانی است اما افزودن این اثرات سبب افزایش چگالی تراز گردیده است.

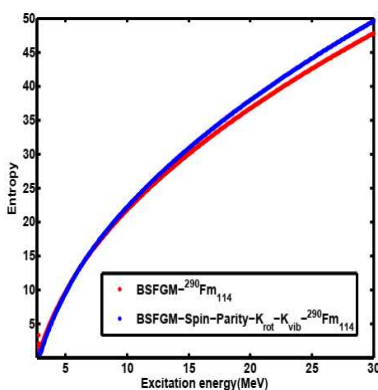




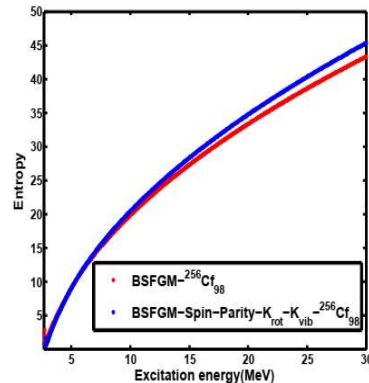
شکل ۱ چگالی تراز محاسبه شده با استفاده از $TD(P - E_{shell}) - BSFGM$ مدل گاز فرمی جابه جایی به همراه کمیت چگالی تراز وابسته به دما و در نظر گرفتن این اثرات، برحسب انرژی برانگیختگی، مقایسه شده است با $TD(P - E_{shell}) - BSFGM$ به همراه کمیت چگالی تراز وابسته به دما (الف) برای ایزوتوپ سنگین $^{256}\text{Cf}_{98}$ ، (ب) برای ایزوتوپ فوق سنگین $^{290}\text{Fm}_{114}$ ، (پ) چگالی تراز محاسبه شده با استفاده از $TD(P - E_{shell}) - BSFGM$ به همراه کمیت چگالی تراز وابسته به دما و در نظر گرفتن اثرات.

در شکل (۲- الف و ب) آنتروپی ایزوتوپ های سنگین و فوق سنگین $^{256}\text{Cf}_{98}$ و $^{290}\text{Fm}_{114}$ محاسبه شده با استفاده $TD(P - E_{shell}) - BSFGM$ به همراه پارامتر چگالی تراز وابسته به دما با در نظر گرفتن اثرات اسپین و پارিতে و همچنین اثرات حرکت های چرخشی و ارتعاشی با همدیگر مقایسه شده اند. همچنین، در نمودار (۲- پ) تأثیر اسپین و پارিতে با اثرات مربوط به حرکت های چرخشی و ارتعاشی با همدیگر مقایسه شده اند. این مقایسه نشان می دهد که هرچند روند کلی

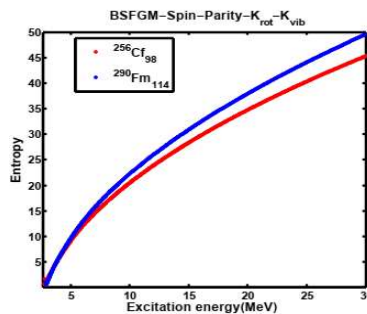
تغییرات منحنی‌ها یکسان است اما در انرژی‌های پایین افزودن این حرکات تأثیر چندانی بر آنتروپی ندارد، هرچند در انرژی‌های بالاتر افزودن این اثرات سبب افزایش اندک در آنتروپی می‌گردد.



(ب)



(الف)



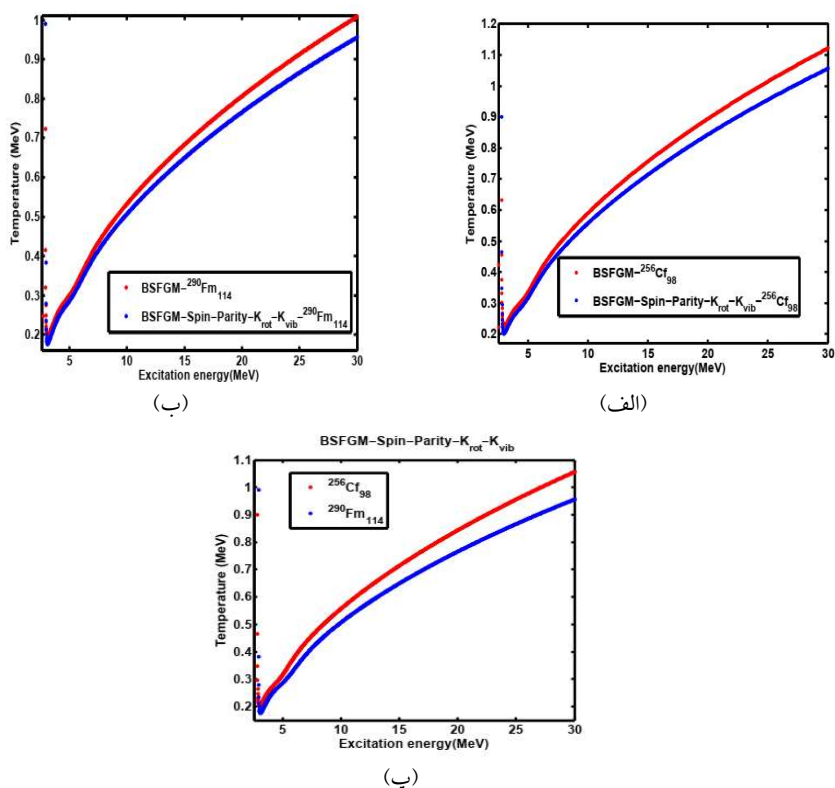
(پ)

شکل ۲ آنتروپی محاسبه‌شده با استفاده از $TD(P - E_{shell}) - BSFGM$ به همراه کمیت چگالی تراز وابسته به دما و در نظر گرفتن اثرات، برحسب انرژی برانگیختگی، مقایسه شده است با $TD(P - E_{shell}) - BSFGM$ به همراه کمیت چگالی تراز وابسته به دما (الف) برای ایزوتوپ سنگین $^{256}Cf_{98}$ ، (ب) برای ایزوتوپ فوق سنگین $^{290}Fl_{114}$ ، (پ) چگالی تراز محاسبه‌شده با استفاده از $TD(P - E_{shell}) - BSFGM$ به همراه کمیت چگالی تراز وابسته به دما و در نظر گرفتن اثرات.

در شکل (۳- الف و ب)، دمای ایزوتوپ‌های سنگین و فوق سنگین $^{256}Cf_{98}$ و $^{290}Fl_{114}$ محاسبه‌شده با استفاده از $TD(P - E_{shell}) - BSFGM$ به همراه کمیت چگالی تراز وابسته به دما که با دمای ایزوتوپ‌های سنگین و فوق سنگین $^{256}Cf_{98}$ و $^{290}Fl_{114}$ محاسبه‌شده با استفاده از $TD(P - E_{shell}) - BSFGM$ به همراه کمیت چگالی تراز وابسته به دما و اثرات ارتعاشی و



چرخشی و اثرات پارایته و اسپینی مقایسه شده‌اند. مقایسه نشان می‌دهد دمای ایزوتوپ‌های سنگین و فوق سنگین $^{256}\text{Cf}_{98}$ و $^{290}\text{Fl}_{114}$ محاسبه شده با استفاده $TD(P - E_{\text{shell}}) - BSFGM$ به همراه کمیت چگالی تراز وابسته به دما و اثرات ارتعاشی و چرخشی و اثرات پارایته و اسپینی کمتر از دمای ایزوتوپ‌های سنگین و فوق سنگین $^{256}\text{Cf}_{98}$ و $^{290}\text{Fl}_{114}$ محاسبه شده با استفاده $TD(P - E_{\text{shell}}) - BSFGM$ به همراه کمیت چگالی تراز وابسته به دما می‌باشد. از طرفی همان گونه که انتظار می‌رود دمای ایزوتوپ فوق سنگین $^{290}\text{Fl}_{114}$ محاسبه شده با استفاده $TD(P - E_{\text{shell}}) - BSFGM$ به همراه کمیت چگالی تراز وابسته به دما و اثرات ارتعاشی و چرخشی و اثرات پارایته و اسپینی کمتر از دمای ایزوتوپ سنگین $^{256}\text{Cf}_{98}$ محاسبه شده با استفاده $TD(P - E_{\text{shell}}) - BSFGM$ به همراه کمیت چگالی تراز وابسته به دما و اثرات ارتعاشی و چرخشی و اثرات پارایته و اسپینی است (نمودار (ب)).



شکل ۳ مقایسه دمای محاسبه شده با استفاده از مدل گاز فرمی جابه جا شده در حالت‌های مختلف برای ایزوتوپ

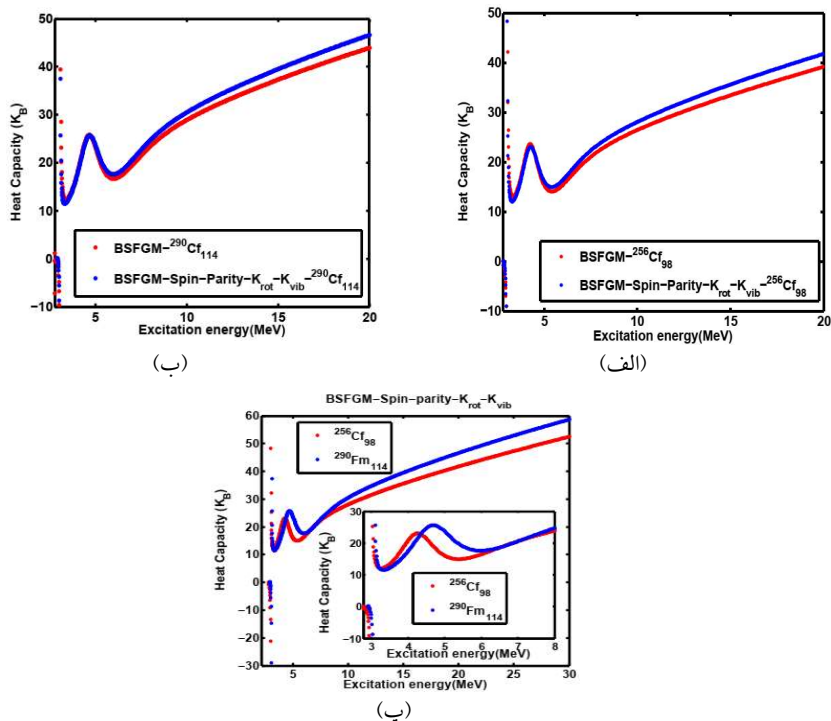
سنگین $^{256}\text{Cf}_{98}$ و ایزوتوپ فوق سنگین $^{290}\text{Fl}_{114}$ ، برحسب انرژی برانگیختگی.

در شکل (۴- الف و ب) ظرفیت گرمایی ایزوتوپ‌های سنگین و فوق سنگین $^{256}\text{Cf}_{98}$ و $^{290}\text{Fl}_{114}$ محاسبه شده با استفاده $TD(P - E_{\text{shell}}) - BSFGM$ به همراه کمیت چگالی تراز وابسته به دما با چگالی تراز ایزوتوپ‌های سنگین و فوق سنگین $^{256}\text{Cf}_{98}$ و $^{290}\text{Fl}_{114}$ محاسبه شده با استفاده از $TD(P - E_{\text{shell}}) - BSFGM$ به همراه کمیت چگالی تراز وابسته به دما و اثرات ارتعاشی و چرخشی و اثرات پارایته و اسپینی، با یکدیگر مقایسه شده‌اند. این مقایسه نشان می‌دهد؛ که ظرفیت گرمایی ایزوتوپ‌های سنگین و فوق سنگین $^{256}\text{Cf}_{98}$ و $^{290}\text{Fl}_{114}$ محاسبه شده با استفاده $TD(P - E_{\text{shell}}) - BSFGM$ به همراه کمیت چگالی تراز وابسته به دما و اثرات ارتعاشی و چرخشی و اثرات پارایته و اسپینی بیشتر از چگالی تراز ایزوتوپ‌های سنگین و فوق سنگین $^{256}\text{Cf}_{98}$ و $^{290}\text{Fl}_{114}$ محاسبه شده با استفاده $TD(P - E_{\text{shell}}) - BSFGM$ به همراه کمیت چگالی تراز وابسته به دما می‌باشد.

از طرفی ظرفیت گرمایی ایزوتوپ فوق سنگین $^{290}\text{Fl}_{114}$ محاسبه شده با استفاده $TD(P - E_{\text{shell}}) - BSFGM$ به همراه کمیت چگالی تراز وابسته به دما و اثرات ارتعاشی و چرخشی و اثرات پارایته و اسپینی بیشتر از چگالی تراز ایزوتوپ سنگین $^{256}\text{Cf}_{98}$ محاسبه شده با استفاده $TD(P - E_{\text{shell}}) - BSFGM$ به همراه کمیت چگالی تراز وابسته به دما و اثرات ارتعاشی و چرخشی و اثرات پارایته و اسپینی می‌باشد (نمودار (پ)).

و از طرفی شکستن اولین جفت نوکلئونی برای ایزوتوپ‌های سنگین و فوق سنگین $^{256}\text{Cf}_{98}$ و $^{290}\text{Fl}_{114}$ به ترتیب در $E=2.948 \text{ Mev}$ و $E=3.04 \text{ Mev}$ قابل مشاهده است. همچنین، شکستن اولین جفت نوکلئونی در $E = 2\Delta_0$ همان گونه که انتظار می‌رفت، منطقی به نظر می‌آید.





شکل ۴ مقایسه ظرفیت گرمایی محاسبه شده با استفاده از مدل گاز فرمی جابه‌جا شده در حالت‌های مختلف برای ایزوتوپ سنگین $^{256}\text{Cf}_{98}$ و ایزوتوپ فوق سنگین $^{290}\text{Fm}_{114}$ ، برحسب انرژی برانگیختگی.

۳. نتیجه گیری

در این پژوهش ابتدا با استفاده از تقریب توماس فرمی، چگالی تراز تک ذره‌ای محاسبه و سپس با استفاده از پتانسیل وودزساکسون به همراه پتانسیل کولنی با در نظر گرفتن تغییر شکل محوری کمیت چگالی تراز محاسبه شده است. در محاسبه چگالی تراز اثراتی مثل جفت‌شدگی، زوج-فرد، اثر پوسته و اثرات ارتعاشی و چرخشی و اثرات اسپینی و پاریده بر چگالی تراز هسته و کمیت‌های ترمودینامیکی آن به ویژه در انرژی‌های تحریکی بالا تأثیر می‌گذارد که در برخی محاسبات این اثرات نادیده گرفته شده‌اند. در این پژوهش اثرات بیان شده در چگالی تراز لحاظ شده و رابطه چگالی تراز اصلاح شده و در محاسبات استفاده شده است. نتیجه بدست آمده از محاسبات در شکل‌های (۱) تا (۴) به ترتیب برای چگالی تراز، آنتروپی، دما و ظرفیت گرمایی ایزوتوپ‌های

سنگین و فوق سنگین $^{256}\text{Cf}_{98}$ و $^{290}\text{Fl}_{114}$ به صورت تابعی از انرژی تحریکی هسته رسم نموده و با یکدیگر مقایسه گردیده است. با توجه به نمودار ظرفیت گرمایی شکستن اولین جفت نوکلئونی در $E = 2\Delta_0$ منطقی به نظر می‌آید. به دلیل نبود داده‌های تجربی این روش محاسبه روش قابل قبولی برای محاسبه چگالی تراز و کمیت‌های ترمودینامیکی هسته‌های فوق سنگین می‌باشد.

منابع

- [1] Santhosh Kumar, S., "Level density and shape changes in excited sd shell nuclei", *Pramana* 71, 175-180, 2008. <https://doi.org/10.1007/s12043-008-0150-9>
- [2] Caurier, E., Martínez-Pinedo, G., Nowacki, F., Poves, A. and Zuker, A.P., "The shell model as a unified view of nuclear structure." *Reviews of modern Physics* 77(2), 427-488, 2005. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.427>
- [3] Bohr, A.N. and Mottelson, B.R., "Nuclear Structure (in 2 volumes) ", *World Scientific Publishing Company*, 1998.
- [4] Dilg, W., Schantl, W., Vonach, H. and Uhl, M., "Level density parameters for the back-shifted fermi gas model in the mass range $40 < A < 250$ ", *Nuclear Physics A* 217(2), 269-298, 1973. [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(73\)90196-6](https://doi.org/10.1016/0375-9474(73)90196-6)
- [5] Gilbert, A. and Cameron, A.G.W., "A composite nuclear-level density formula with shell corrections", *Canadian Journal of Physics* 43(8), 1446-1496, 1965. <https://doi.org/10.1139/p65-139>.
- [6] Alhassid, Y., Bertsch, G.F. and Fang, L., "Nuclear level statistics: Extending shell model theory to higher temperatures", *Physical Review C—Nuclear Physics* 68(4), 044322, 2003. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.68.044322>
- [7] Razavi, R., Behkami, A.N. and Dehghani, V., "Pairing phase transition and thermodynamical quantities in $^{148,149}\text{Sm}$ ", *Nuclear Physics A* 930, 57-62, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2014.07.016>
- [8] Attias, H. and Alhassid, Y., "The perturbed static path approximation at finite temperature: observables and strength functions", *Nuclear physics A* 625(3): 565-597, 1997. [https://doi.org/10.1016/S0375-9474\(97\)00486-7](https://doi.org/10.1016/S0375-9474(97)00486-7)
- [9] Bethe, H.A., "An attempt to calculate the number of energy levels of a heavy nucleus", *Physical Review* 50(4), 332, 1936. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.50.332>
- [10] Moretto, L.G., "Thermodynamical properties of a paired nucleus with a fixed number of quasi-particles", *Nuclear Physics A* 243(1), 77-99, 1975. [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(75\)90022-6](https://doi.org/10.1016/0375-9474(75)90022-6)
- [11] Guttormsen, M., Jurado, B., Wilson, J.N., Aiche, M., Bernstein, L.A., Ducasse, Q., Giacoppo, F., Gørgen, A., Gunsing, F., Hagen, T.W. and Larsen, A.C., "Constant-temperature level densities in the quasicontinuum of Th and U isotopes", *Physical Review C—Nuclear Physics* 88(2), 024307, 2013. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.88.024307>
- [12] Guttormsen, M., Bernstein, L.A., Gørgen, A., Jurado, B., Siem, S., Aiche, M., Ducasse, Q., Giacoppo, F., Gunsing, F., Hagen, T.W. and Larsen, A.C., "Scissors resonance in the quasicontinuum of Th, Pa, and U isotopes", *Physical Review C* 89(1), 014302, 2014. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.89.014302>
- [13] Schiller, A., Bergholt, L., Guttormsen, M., Melby, E., Rekstad, J. and Siem, S., "Extraction of level density and γ strength function from primary γ spectra", *Nuclear Instruments*



- and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* 447(3), 498-511, 2000. [https://doi.org/10.1016/S0168-9002\(99\)01187-0](https://doi.org/10.1016/S0168-9002(99)01187-0)
- [14] Pahlavani, M.R. and Dinan, M.M., "Thermal properties of ^{172}Yb and ^{162}Dy isotopes in the back-shifted Fermi gas model with temperature-dependent pairing energy", *Pramana* 93, 1-10, 2019. <https://doi.org/10.1007/s12043-019-1799-y>
- [15] Bucurescu, D. and von Egidy, T., "Systematics of nuclear level density parameters", *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* (10), S1675, 2005. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.72.044311>
- [16] Mengoni, A. and Nakajima, Y., "Fermi-gas model parametrization of nuclear level density", *Journal of Nuclear Science and Technology* 31(2), 151-162, 1994. <https://doi.org/10.1080/18811248.1994.9735131>
- [17] Wang, M., Huang, W.J., Kondev, F.G., Audi, G. and Naimi, S., "The AME 2020 atomic mass evaluation (II). Tables, graphs and references", *Chinese Physics C* 45(3), 030003, 2021. <https://doi.org/10.1088/1674-1137/abddaf>
- [18] Von Egidy, T., Schmidt, H.H. and Behkami, A.N., "Nuclear level densities and level spacing distributions: Part II", *Nuclear Physics A* 481(2), 189-206, 1988. [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(88\)90491-5](https://doi.org/10.1016/0375-9474(88)90491-5)
- [19] Madland, D.G. and Nix, J.R., "New model of the average neutron and proton pairing gaps", *Nuclear Physics A* 476(1), 1-38, 1988. [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(88\)90370-3](https://doi.org/10.1016/0375-9474(88)90370-3)
- [20] Ivanyuk, F.A., Ishizuka, C., Usang, M.D. and Chiba, S., "Temperature dependence of shell corrections", *Physical Review C* 97(5), 054331, 2018. <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.97.054331>
- [21] Alavi, S.A. and Dehghani, V., "Back shifted Fermi gas model with temperature dependent pairing energy: Thermal properties of ^{98}Mo ", *International Journal of Modern Physics E* 25(09), 1650065, 2016. <https://doi.org/10.1142/S0218301316500658>
- [22] Pahlavani, M.R., Alavi, S.A. and Tahanipour, N., "Effect of nuclear deformation on the potential barrier and alpha-decay half-lives of superheavy nuclei", *Modern Physics Letters A* 28(16), 1350065, 2013. <https://doi.org/10.1142/S021773231350065X>
- [23] Möller, P., Sierk, A.J., Ichikawa, T. and Sagawa, H., "Nuclear ground-state masses and deformations: FRDM (2012)", *Atomic Data and Nuclear Data Tables* 109, 1-204, 2016. <https://doi.org/10.1016/j.adt.2015.10.002>
- [24] Koning, A.J., Hilaire, S. and Goriely, S., "Global and local level density models." *Nuclear Physics A* 810(1-4), 13-76, 2008. <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysa.2008.06.005>
- [25] Goriely, S., "A new nuclear level density formula including shell and pairing correction in the light of a microscopic model calculation", *Nuclear Physics A* 605(1), 28-60, 1996. [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(96\)00162-5](https://doi.org/10.1016/0375-9474(96)00162-5)



This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-Noncommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

