Research Paper

Investigation of Entanglement in the Moshinsky Atom[1]

Hamdollah Salehi[*2], Mehrzad Ashrafpour[3] and Hamideh Arimashi[4]

Received: 2021.11.05
Revised: 2022.02.22
Accepted: 2022.05.22

Abstract

One of the most critical aspects of studying entanglement states is quantifying the degree of entanglement. One of the entanglement measures for pure states is Van- Neumann entropy, which is why Van-Neumann entropy is also called entanglement entropy. In this work, to calculate the entanglement of a three-particle atom called the Moshinsky atom; first, the reduced density matrix was calculated and then using the coordinates of the three particles in the lithium atom, the entropy entanglement was calculated. We obtained the entropy of entanglement in terms of the frequency parameter related to the external coordinate field.

Keywords: *Entanglement, Density Functional Theory, Many-body Systems, Moshinsky Atom, Van-Neumann Entropy, Reduced Density Matrix.*

---

[1] DOI: 10.22051/ijap.2023.38413.1246
[2] Professor, Department of Physics, Faculty of Science, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. (Corresponding Author). Email: salehi_h@scu.ac.ir.
[3] Assistant Professor, Department of Physics, Faculty of Science, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. Email: mehrzadashrafpour@yahoo.com
[4] M. Sc. Student, Department of Physics, Faculty of Science, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. Email: h.arimashi99@gmail.com

مقالهٔ پژوهشی

بررسی درهم‌تنیدگی در اتم موشینسکی[1]

حمداله صالحی[*2]، مهرزاد اشرف‌پور[3] و حمیده عریمشی[4]

فصلنامهٔ علمی فیزیک کاربردی ایران
دانشکدهٔ فیزیک، دانشگاه الزهرا
سال سیزدهم، پیاپی ۳۴، پاییز ۱۴۰۲
صص ۱۴۰ - ۱۶۲

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۸/۱۴
تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۱۲/۰۳
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۳/۰۱

چکیده:
یکی از جنبه‌های مهم در مطالعه‌ی حالت‌های درهم‌تنیده، کمی کردن میزان درهم‌تنیدگی است. از جمله سنجه‌های درهم‌تنیدگی برای حالت‌های خالص، آنتروپی فون- نیومن است و به همین دلیل آنتروپی فون- نیومن را آنتروپی درهم‌تنیدگی نیز می‌نامند. در کار حاضر به منظور محاسبه‌ی درهم‌تنیدگی یک اتم سه ذره‌ای به نام اتم موشینسکی، ابتدا ماتریس چگالی کاهش‌یافته حساب شده و سپس با استفاده از مختصات سه ذره در اتم لیتیوم، آنتروپی درهم‌تنیدگی سامانه‌ی مورد مطالعه محاسبه وآنتروپی درهم تنیدگی را بر حسب پارامتر بسامد مربوط به میدان هماهنگ خارجی به دست آمد.

واژگان کلیدی: *درهم‌تنیدگی، نظریه‌ی تابعی چگالی، سامانه‌های بس‌ذره‌ای، اتم موشینسکی، آنتروپی فون- نیومن، ماتریس چگالی کاهش‌یافته.*

[1] DOI: 10.22051/ijap.2023.38413.1246

[2] استاد، گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران. (نویسنده مسئول)Email: salehi_h@scu.ac.ir

[3] استادیار، گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران. Email: mehrzadashrafpour@yahoo.com

[4] دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران. Email: h.arimashi99@gmail.com

۱. مقدمه

فیزیک ماده چگال و نظریه‌ی اطلاعات کوانتومی دو شاخه بسیار مهم از فیزیک می‌باشند. این دو شاخه از فیزیک برای سال‌های طولانی به‌صورت جداگانه بررسی می‌شدند. هدف فیزیکدانان ماده چگال توجیه ویژگی‌های مواد و پیش‌بینی حالت‌های جدیدی از مواد است. در مکانیک کوانتومی نیز بیشتر سامانه‌های بس‌ذره‌ای متشکل از تعداد بسیار زیادی الکترون‌ها و هسته‌های اتمی بررسی می‌شود. مفهوم درهم‌تنیدگی برای اولین بار در سال ۱۹۳۵ در مقاله‌ی معروف EPR[۱] مطرح و همبستگی‌های غیرموضعی بین سامانه‌های کوانتومی را توصیف می‌کند که هیچ همتای کلاسیکی ندارند [۱،۲].

حل معادله‌ی شرودینگر بس‌ذره‌ای کاری دشوار می‌باشد و حل آن برای N الکترون در محاسبات کلاسیکی بسیار پیچیده است. اگرچه، روشی مهم و قدرتمند وجود دارد که محاسبات کلاسیکی برای سامانه‌های الکترونی بس‌ذره‌ای را با استفاده از نظریه‌ی تابعی چگالی ساده می‌نماید. نظریه‌ی تابعی چگالی تنها به‌یک ویژگی وابسته بوده و از این رو با به‌کار گرفتن آن به‌جای استفاده از تابع‌موج بس‌ذره‌ای برای یافتن ویژگی‌های سامانه‌های بس‌ذره‌ای از جمله درهم‌تنیدگی مفیدتر خواهد بود. در فرمول‌بندی این نظریه، متغیرهای حالت پایه‌ی سامانه‌ی الکترونی اندرکنشی، تابع چگالی حالت‌پایه تعریف می‌شود. چگالی حالت‌پایه‌ی تابع‌موج بس‌ذره‌ای، از نظریه‌ی هوهنبرگ- کوهن به دست می‌آید. قضایای هوهنبرگ- کوهن را می‌توان برای تعریف معیار درهم‌تنیدگی بر حسب کمیت‌های فیزیکی، چون مقادیر موردانتظار مشاهده‌پذیرها به‌جای پارامترهای هدایت خارجی استفاده کرد [۲].

درهم‌تنیدگی را می‌توان با تقریب‌های ویژه در نظریه‌ی تابعی چگالی جای داد. دقت درهم‌تنیدگی با استفاده از این تقریب‌ها برای الگوسازی مناسب سامانه‌ی الکترونی که ابزاری برای اطلاعات کوانتومی است مهم می‌باشد. بررسی این دقت می‌تواند اطلاعات دیگری در مورد یک تقریب و شاید راه‌های آسان‌سازی آن را در اختیار قرار دهد. در نظریه‌ی تابعی چگالی، هر سنجه‌ی درهم‌تنیدگی، تابعی از مقادیر مورد انتظار مشاهده‌پذیرها است. این رویه ارتباط مستقیمی را بین درهم‌تنیدگی و مشتق انرژی حالت‌پایه‌ی سامانه‌ی کوانتومی نسبت به ضرایب میدان معرفی می‌کند که موجب ارتباط عمیقی بین درهم‌تنیدگی و گذارهای فاز کوانتومی می‌باشد. الگوی پیشنهادی در

[1] Einstein- Podolsky- Rosen (EPR)

این پژوهش برگرفته از سامانه‌ی چند الکترونی الگوی موشینسکی[1] در مقاله‌ی "بووریه و همکاران در سال ۲۰۱۳" می‌باشد [۳].

در سال‌های اخیر سامانه‌هایی شامل ذرات اندرکنشی که درون پتانسیل هماهنگ محصور شده‌اند بسیار مورد توجه قرار گرفته است. این سامانه‌ها در فرآیند اطلاعات کوانتومی به کار می‌آیند. در این جا ابتدا برهم‌کنش‌های کوانتومی برای الگوی موشینسکی N ذره‌ای در حالت پایه بررسی می‌شود. این الگوی اتمی تشکیل یافته از برهم‌کنش الکترون– الکترون، با اعمال پتانسیل هماهنگ مشخص می‌شود. سپس به صورت ویژه اتم موشینسکی سه ذره‌ای را در نظر گرفته و درهم‌تنیدگی با استفاده از آنتروپی فون– نیومن و آنتروپی خطی محاسبه می‌شود.

در سال ۲۰۱۰ واینز[2] و همکاران ؛ ویژگی‌های درهم‌تنیدگی کوانتومی در الگوی دوالکترونی حل‌پذیر، اتم موشینسکی[3]، را بررسی نمودند [۴]. در سال ۲۰۱۲ ماجتی[4] و همکاران ارتباط بین درهم‌تنیدگی، انرژی و تبهگنی ترازها در سامانه‌های دوالکترونی چون هلیوم را مورد مطالعه قراردادند [۵]. لین[5] و همکاران در سال ۲۰۱۳ درهم‌تنیدگی فضایی در سامانه های اتم‌های هلیوم و یون‌های هلیوم‌گونه را با استفاده از توابع موج دوالکترونی معرفی‌شده توسط پایه‌های B- Splin بررسی نمودند [۶]. همچنین در سال ۲۰۱۵ ایسکویل و همکاران نشان دادند که برای سامانه‌های هلیم‌گونه با تغییر z یک تناظر یک به یک بین درهم‌تنیدگی و انرژی همبستگی وجود دارد [۷].در همین سال نیز اندازه گیری آنتروپی در هم‌تنیدگی در سامانه‌های بس‌ذره‌ای نیز انجام شده است [۸]. افزون بر این، درسال ۲۰۲۰ درهم تنیدگی کوانتومی در اتم‌ها و ملکول‌ها نیز انجام شده است [۹]. بنابراطلاعات موجود تاکنون درهم تنیدگی با استفاده از نظریه‌ی تابعی چگالی برای سامانه‌های چند الکترونی در ایران مورد بررسی قرار نگرفته است. از این رو، با توجه به سنجه‌ی مورد استفاده (آنتروپی) در کار پیش‌رو برای بررسی درهم‌تنیدگی اتم موشینسکی تاکنون محاسباتی انجام نگرفته است . همچنین، با استفاده از مختصات سه ذره در اتم لیتیوم، آنتروپی درهم‌تنیدگی سامانه‌ی مورد مطالعه محاسبه وآنتروپی درهم‌تنیدگی را بر حسب پارامتر بسامد مربوط به میدان هماهنگ خارجی را به دست آوردیم.

---
[1] Moshinesky Atom
[2] R. J. Yanez
[3] Moshinsky atom
[4] A. P. Majtey
[5] Y. C. Lin

اتم موشینسکی با برهم‌کنش هماهنگ ذرات با پتانسیل هماهنگ مشخص می‌گردد و برای تقریب در سامانه‌های حقیقی از آن استفاده می‌شود. همچنین، این الگوی اتمی به عنوان معیاری برای روش‌های تقریبی در سامانه‌های بس‌ذره‌ای به شمار می‌آید. اتم موشینسکی سامانه‌ای است متشکل از ذراتی با همبستگی هماهنگ که به صورت یکسان در پتانسیل هماهنگ همسانگرد خارجی محصور شده‌اند. در کار حاضر، ابتدا اتم موشینسکی و نظریه‌ی تابعی چگالی معرفی شده و سپس توصیفی از تابع موج سامانه بس‌ذره‌ای ارائه می‌شود. در ادامه، درهم‌تنیدگی برای ویژه حالت‌های اتم موشینسکی محاسبه شده و در بخش آخر نتایج به دست آمده ارائه می‌شود.

۲. اتم موشینسکی و نظریهٔ تابعی چگالی

هامیلتونی کلی یک اتم موشینسکی یک بعدی با سه الکترون داده می‌شود با [۱۰،۱۱]:

$$H = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)+\frac{1}{2}\omega^2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)$$
$$\pm\frac{1}{2}\lambda^2\left[\left(x_1-x_2\right)^2+\left(x_2-x_3\right)^2+\left(x_3-x_1\right)^2\right] \qquad (۱)$$

که در آن، x_1 x_2 و x_3 مختصات سه ذره، ω بسامد طبیعی میدان هماهنگ خارجی و λ بسامد طبیعی میدان هماهنگ متقابل می‌باشد. همچنین،علامت مثبت و منفی به ترتیب در آخرین عبارت نیز بیان کننده‌ی برهم‌کنش جاذبه و دافعه ی بین الکترون‌ها است. همچنین، در این‌جا از واحدهای اتمی $(m_e = 1. h = 1)$ استفاده شده است.

یکی از جنبه‌های مهم در مطالعه‌ی حالت‌های درهم‌تنیده، کمّی کردن میزان درهم‌تنیدگی است. اگر درهم‌تنیدگی به عنوان یک منبع چون انرژی در نظر گرفته شود، مقدار درهم‌تنیدگی یک زوج درهم‌تنیده مهم می‌باشد. در نظریه‌ی اطلاعات کلاسیک برای توزیع احتمال یک متغیر تصادفی، کمیتی به نام آنتروپی شانون معرفی می‌شود. با افزایش بی‌نظمی در سامانه و پراکنده‌تر شدن احتمال، آنتروپی شانون هم بیشتر می‌شود و بیشینه‌ی آن زمانی است که همه ی رخدادها با احتمال یکسان رخ دهند. معادل این معیار در نظریه ی اطلاعات کوانتومی برای توزیع احتمال یک ماتریس چگالی، آنتروپی فون- نیومن است. آنتروپی فون- نیومن معیاری از درهم‌تنیدگی حالت‌های خالص می‌باشد و به‌همین دلیل آنتروپی فون- نیومن را آنتروپی درهم‌تنیدگی نیز می‌نامند. از این رو، برای محاسبه‌ی درهم‌تنیدگی می‌توان آنتروپی فون- نیومن را محاسبه کرد. از

این رو، با درنظر گرفتن درهم‌تنیدگی تولید شده توسط درجه‌ی آزادی فضایی، درهم‌تنیدگی حالت پایه‌ی سامانه‌های بس- ذره‌ای با استفاده از نظریه‌ی تابعی چگالی بررسی خواهد شد. برای حل درهم‌تنیدگی سامانه‌های بس- ذره‌ای، باید مسئله‌ی اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی برای ذرات تمیزناپذیر حل شود. مشکل اصلی در کمی کردن درهم‌تنیدگی ناشی از متقارن بودن یا پادمتقارن بودن تابع موج برای بوزون‌ها و فرمیون‌ها است؛ از این رو، با توجه به آمار ذرات تمیزناپذیر می‌توان بین درهم‌تنیدگی و همبستگی تفاوت قائل شد. کاربرد روش‌های تقریبی برای مطالعه‌ی حالت‌های مانا شامل پیداکردن ویژه‌مقادیر انرژی و ویژه‌توابع هامیلتونی مستقل از زمان است که جواب‌های دقیقی ندارند. همچنین، ارتباط بین برخی ویژگی‌های فیزیکی یک ترکیب از جمله پیوندها را با استفاده از درهم‌تنیدگی توضیح داده و با بررسی یک پتانسیل تبادلی- همبستگی محاسبات انجام و نتایج به دست آمده با دیگر داده‌های موجود مقایسه و تفسیر می‌شود. از این رو، با توجه به این که میزان درهم‌تنیدگی بر اساس معیار آنتروپی مشخص می‌گردد، در این مقاله، آنتروپی فون- نیومن مورد نظر می‌باشد. همچنین، برای حل آن می‌توان از روش حل معادلات شرودینگر در سامانه‌های چند الکترونی وچگالی بار الکتریکی اتم موشینسکی در نظریه‌ی تابعی چگالی استفاده نمود.

نظریه‌ی تابعی چگالی همه ی ویژگی‌های حالت پایه را نشان می‌دهد. از این رو، درهم‌تنیدگی ممکن است به‌عنوان تابعی از حالت پایه‌ی چگالی تک ذره $n(r)$ نوشته شود. متأسفانه، تابع به‌صورت صریح و روشن برای بسیاری از ویژگی‌های، از جمله درهم‌تنیدگی، ناشناخته است. با این حال برای این که به‌توان درهم‌تنیدگی را به‌عنوان تابعی از تابع موج برهمکنش بیان کرد، درهم‌تنیدگی مربوط به اتم موشینسکی را با استفاده از تقریب چگالی موضعی پتانسیل همبستگی- تبادلی محاسبه می‌شود. درادامه به محاسبات درهم‌تنیدگی اتم موشینسکی پرداخته و نتایج آن ارائه می‌شود.

۳. توصیف تابع‌موج سامانه‌ی بس- ذره‌ای

می‌توان برای توصیف یک سامانه ی بس‌ذره‌ای، تابع موج سامانه را در معادلات شرودینگر جایگذاری و آن را حل نمود. سپس سامانه، متناسب با تعداد ذرات در نظر گرفته می‌شود. اگر چه این تابع موج معمولاً در برخی از مسائل از جمله بیان درهم‌تنیدگی سامانه ی بس- ذره‌ای وامی‌ماند. هم چنین در بسیاری از سنجه‌های درهم‌تنیدگی مانند تلاقی، منفیت و یا آنتروپی فون- نیومن از ماتریس چگالی سامانه استفاده می‌شود. پس این تابع موج بس‌ذره‌ای خیلی به‌کار نمی‌آید [۱۲].

تابع موج سامانه ی بس- ذره‌ای به‌صورت دترمینان اسلیتر فرمول‌بندی می‌شود که به آن عملگر ماتریس چگالی گفته می‌شود و تفسیر فیزیکی روشنی را فراهم می‌نماید. بافرض این که ماتریس چگالی یک سامانه ی بس- ذره‌ای متشکل از w ذره، به صورت $\Gamma\left(x_1, x_2, \ldots\ldots. x_\omega \middle| x_1', x_2', \ldots x_\omega'\right)$ در نظر گرفته شود که درآن $x_1, x_2, \ldots x_\omega$ شامل درجهٔ آزادی اسپین و فضایی ذرات می باشند. حال برای محاسبه ی ماتریس چگالی، دترمینان بر اساس ماتریس چگالی تک‌ذره به صورت زیر نوشته می‌شود[۱۳،۱۴].

$$\Gamma\left(x_1, x_2, \ldots\ldots. x_\omega \middle| x_1', x_2', \ldots x_\omega'\right) = \frac{1}{\omega!}\begin{vmatrix} \rho(x_1, x_1') & \rho(x_1, x_2') & \ldots. & \rho(x_1, x_\omega') \\ \rho(x_2, x_1') & \rho(x_2, x_2') & \ldots. & \rho(x_2, x_\omega') \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \rho(x_\omega, x_1') & \rho(x_\omega, x_2') & \ldots. & \rho(x_\omega, x_\omega') \end{vmatrix} \quad (۲)$$

که در آن، $\rho(x_i, x_j) = \rho^*(x_i, x_j)$ ماتریس چگالی کاهش‌یافته‌ی تک‌ذره بوده و هرمیتی می‌باشد. رابطه‌ی ماتریس چگالی کاهش‌یافته‌ی تک‌ذره را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\rho_1 = Tr_{23}(|\psi\rangle\langle\psi|)$$

حال برای محاسبه‌ی عناصر ماتریسی ρ_1 به صورت زیر عمل می‌شود.

$$\langle r_1|\rho_1|r_1'\rangle = \langle r_1|Tr_{23}(|\psi\rangle\langle\psi|)|r_1'\rangle = \int\langle r_1, r_2, r_3|\psi\rangle\langle\psi|r_1', r_2, r_3\rangle dr_2 dr_3 \quad (۴)$$

با داشتن $\langle\psi|r_1', r_2, r_3\rangle = \psi^*(r_1', r_2, r_3)$ و $\langle r_1, r_2, r_3|\psi\rangle = \psi(r_1, r_2, r_3)$ می‌توان $\rho_1(r_1, r_1')$ را به صورت زیر نوشت:

$$\rho_1(r_1, r_1') = \int\psi(r_1, r_2, r_3)\psi^*(r_1', r_2, r_3) dr_2 dr_3 \quad (۵)$$

و برای $\rho(r_1, r_2)$ از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود [۱۵].

$$\rho(r_1, r_2) = \int\psi(r_2, r_3)\psi^*(r_1, r_3) dr_3 \quad (۶)$$

از جمله ویژگی‌های ماتریس چگالی این است که همواره مثبت است. افزون بر این، برای توصیف سامانه‌های کوانتومی از ماتریس چگالی کاهش‌یافته استفاده می‌شود.

سنجه‌ی مقدار درهم‌تنیدگی $E(|\Xi\rangle)$ حالت Ξ، بر حسب آنتروپی فون- نیومن به صورت زیر بیان می‌شود [۱۲]:

$$E(|\Xi\rangle) = S(\rho_1) - 1 \tag{۷}$$

که آنتروپی فون- نیومن به شکل زیر تعریف می‌شود [۱۵]:

$$S(\rho_1) = -\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i \tag{۸}$$

و در آن، ρ_1 ماتریس چگالی کاهش یافته‌ی تک ذره و $\{\lambda_i\}$ ویژه مقادیر ρ_1 هستند.
تابع موج کل، $\langle\Xi|$را می‌توان با صرف‌نظر از بر همکنش اسپین- مدار به صورت ضرب تابع موج فضایی ψ و تابع موج χ اسپینی نوشت:

$$\Xi_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_{\partial 3}}(r_1,r_2,r_3) = \psi(r_1,r_2,r_3)\chi_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_{\partial 3}} \tag{۹}$$

این تابع موج در حالت کلی پادمتقارن است.
برای محاسبه‌ی درهم‌تنیدگی باید ماتریس چگالی (تک الکترونی) کاهش‌یافته را محاسبه کرد. بعد از محاسبه‌ی ماتریس چگالی کاهش یافته، با تغییر پایه‌ها آن را قطری و ویژگی‌های درهم‌تنیدگی اتم موشینسکی با استفاده از ویژه‌مقادیر ماتریس چگالی کاهش‌یافته بررسی می‌شود. این بررسی به حالت پایه و برخی از ویژه‌حالت‌های برانگیخته‌ی اتم موشینسکی محدود می‌شود.

۴. محاسبه‌ی درهم‌تنیدگی ویژه‌حالت‌های اتم موشینسکی

با توجه به این که یکی از جنبه‌های مهم در مطالعه‌ی حالت‌های درهم‌تنیده، کمی کردن میزان درهم‌تنیدگی است. از این رو، باید برای محاسبه میزان درهم‌تنیدگی، آنتروپی فون- نیومن را محاسبه و برای محاسبه آنتروپی فون- نیومن، باید ماتریس چگالی (کاهش یافته) را محاسبه نمود. با درنظر گرفتن درهم‌تنیدگی تولید شده توسط درجه‌ی آزادی فضایی، درهم‌تنیدگی حالت پایه‌ی سامانه‌های بس‌ذره‌ای با استفاده از نظریه‌ی تابعی چگالی بررسی می‌شود. در نظریه‌ی تابعی چگالی، اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی تابعی از مقدار میانگین مشاهده‌پذیر است. این روش رابطه‌ی مستقیمی بین درهم‌تنیدگی و انرژی حالت پایه ی سامانه ی کوانتومی با استفاده از ضرایب میدان برقرار می‌کند که به یک رابطه‌ی قابل توجهی بین درهم‌تنیدگی وگذار فاز کوانتومی منجر می‌شود. بر اساس رابطه ی (۲)، برای محاسبه ی درهم‌تنیدگی برخی از ویژه‌حالت‌های اتم موشینسکی که متشکل از سه ذره

می‌باشد، یک ماتریس 3×3 خواهیم داشت که در این‌جا تک‌تک آرایه‌های ماتریس به صورت زیر به دست می‌آیند:

(۱۰)

$$\Gamma\left(x_1,x_2,x_3\middle|x_1',x_2',x_3'\right)=\frac{1}{3!}\begin{vmatrix}\rho(x_1,x_1') & \rho(x_1,x_2') & \rho(x_1,x_3')\\ \rho(x_2,x_1') & \rho(x_2,x_2') & \rho(x_2,x_3')\\ \rho(x_3,x_1') & \rho(x_3,x_2') & \rho(x_3,x_3')\end{vmatrix}$$

تابع موج اتم موشینسکی بر حسب مختصات ژاکوبی با رابطه ی زیر داده می‌شود [۳]:

$$\psi(r_1,r_2,r_3)=\psi(R_1,R_2,R_3)=\psi_{nR_1}(R_1)\psi_{nR_2}(R_2)\psi_{nR_3}(R_3) \quad (۱۱)$$

که در آن،

$$\psi_{nR_1}(R_1)=\left(\frac{\beta_i^{3/4}}{2^n R_{i_{nR_2}}}\right)^{1/2}\exp\left[\frac{-1}{2}\sqrt{\beta_i}R_i^2\right]H_{nR_i}(R_i^2\beta_i^{1/4}) \quad (۱۲)$$

که در آن، $H_{nR_i}(R_i^2\beta_i^{1/4})$ توابع هرمیت می‌باشند.

با استفاده از این رابطه و مقادیر $\beta_1=\omega^2$ و $\beta_2=\beta_3=\Lambda^2=\omega^2\pm3\lambda^2$ خواهیم داشت:

(۱۳)

$$\psi(R_1,R_2,R_3)=\frac{e^{\frac{-1}{2}\left(\sqrt{\omega^2}R_1^2+\sqrt{\omega^2\pm\lambda^2}R_2^2+\sqrt{\omega^2\pm\lambda^2}R_3^2\right)}}{\pi^{3/4}}$$
$$\left(\frac{2^{-(n_{R_1}+n_{R_2}+n_{R_3})}\omega^{3/2}\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}}{n_{R_1}!n_{R_2}!n_{R_3}!}\right)\left(H_{n_{R_1}}(\sqrt{\omega}R_1)\left(H_{n_{R_2}}(\sqrt{\omega^2\pm\lambda^2}R_2)\right)\left(H_{n_{R32}}(\sqrt{\omega^2\pm\lambda^2}R_3)\right)\right)$$

حال برای محاسبه‌ی چگالی کاهش‌یافته تک‌ذره خواهیم داشت [۳،۱۵]:

$$\rho(R_1,R_2)=\frac{1}{\sqrt{\omega}\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}}\left(\frac{2^{-(n_{R_1}+n_{R_2}+n_{R_3})}\,\omega^{3/2}\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}}{n_{R_1}!n_{R_2}!n_{R_3}!}\right)(H_{n_{R_1}}(\sqrt{\omega}R_1))^2$$

$$\iint\frac{e^{\frac{-1}{2}\left(\sqrt{\omega^2}R_1^2+\sqrt{\omega^2\pm\lambda^2}R_2^2+\sqrt{\omega^2\pm\lambda^2}R_3^2\right)}}{\pi^{3/4}}\left(H_{n_{R_2}}(\sqrt{\omega^2\pm\lambda^2}R_2)\right)^2\left(H_{n_{R3_2}}(\sqrt{\omega^2\pm\lambda^2}R_3)\right)^2 \tag{۱۴}$$

$$d\left(\left(\omega^2\pm\lambda^2\right)^{1/4}R_2\right)d\left(\left(\omega^2\pm\lambda^2\right)^{1/4}R_3\right)=\left(\frac{2^{-(n_{R_1})}\omega}{n_{R_1}!\pi^{1/2}}\right)(H_{n_{R_1}}(\sqrt{\omega}R_1))^2e^{-\omega R_1^2}$$

و به همین ترتیب برای دیگر آرایه‌های قطری ماتریس می‌توان نوشت:

(۱۵)

$$\rho(R_2,R_2)=\int\psi(R_1,R_2,R_3)\psi^*(R_1,R_2,R_3)dR_1dR_3$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\omega}\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}}\left(\frac{2^{-(n_{R_1}+n_{R_2}+n_{R_3})}\,\omega^{3/2}\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}}{n_{R_1}!n_{R_2}!n_{R_3}!}\right)\left(H_{n_{R_2}}(\omega^2\pm\lambda^2)^{1/4}R_2)\right)^2$$

$$\iint\frac{e^{\frac{-1}{2}\left(\omega R_1^2+\sqrt{\omega^2\pm\lambda^2}R_2^2+\sqrt{\omega^2\pm\lambda^2}R_3^2\right)}}{\pi^{3/4}}(H_{n_{R_1}}(\sqrt{\omega}R_1))^2\left(H_{n_{R3}}(\omega^2\pm\lambda^2)^{1/4}R_3)\right)^2$$

$$d\left(\left(\omega^2\pm\lambda^2\right)^{1/4}R_1\right)d\left(\left(\omega^2\pm\lambda^2\right)^{1/4}R_3\right)$$

$$=\pi^{1/4}e^{\left(-\omega\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_2^2\right)}\left(\frac{2^{-(n_{R_2})}\omega}{n_{R_2}!\pi^{1/2}}\right)(H_{n_{R_2}}(\omega^2\pm\lambda^2)^{1/4}R_2))^2$$

(۱۶)

$$\rho(R_3,R_3)=\int\psi(R_1,R_2,R_3)\psi^*(R_1,R_2,R_3)dR_1dR_2=\frac{e^{-\left(\sqrt{\omega^2\pm\lambda^2}R_3^2\right)}}{\sqrt{\omega}\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}}$$

$$\left(\frac{2^{-(n_{R_1}+n_{R_2}+n_{R_3})}\omega^{3/2}\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}}{n_{R_1}!n_{R_2}!n_{R_3}!}\right)\left(H_{n_{R_3}}(\omega^2\pm\lambda^2)^{1/4}R_3)\right)^2\iint e^{-\left(\omega R_1^2+\sqrt{\omega^2\pm\lambda^2}R_2^2\right)}(H_{n_{R_1}}(\sqrt{\omega}R_1))^2$$

$$\left(H_{n_{R2}}(\omega^2\pm\lambda^2)^{1/4}R_2)\right)^2 d\left(\left(\omega^2\pm\lambda^2\right)^{1/4}R_1\right)d\left(\left(\omega^2\pm\lambda^2\right)^{1/4}R_2\right)$$

$$=\pi^{1/4}e^{\left(-\omega\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_3^2\right)}\left(\frac{2^{-(n_{R_3})}\omega}{n_{R_3}!}\right)(H_{n_{R_3}}(\omega^2\pm\lambda^2)^{1/4}R_3))^2$$

همچنین، برای محاسبه ی $\rho(R_1,R_2)$ با توجه به رابطه‌ی (۶) ابتدا باید روابط زیر را محاسبه نمود.

(۱۷)

$$\psi(R_1,R_3)=e^{\frac{-\omega R_1^2}{2}}e^{\frac{-\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_3^2}{2}}\sqrt{\frac{2^{-(n_{R_1}+n_{R_3})}\omega\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/4}}{n_{R_1}!n_{R_3}!\pi}}\left(H_{n_{R_1}}(\omega R_1)\left(H_{n_{R3}}(\omega^2\pm\lambda^2)^{1/4}R_3\right)\right)$$

و

(۱۸)

$$\psi(R_2,R_3)=e^{\frac{-\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_2^2}{2}}e^{\frac{-\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_3^2}{2}}\sqrt{\frac{\omega\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/4}}{2^{(n_{R_2}+n_{R_3})}n_{R_2}!n_{R_3}!\pi}}$$

$$\left(H_{n_{R_2}}((\omega^2\pm\lambda^2)^{1/4}R_2)\left(H_{n_{R3}}(\omega^2\pm\lambda^2)^{1/4}R_3\right)\right)$$

حال خواهیم داشت [۱۳]:

$$\rho(R_1,R_2)=\int\psi(R_2,R_3)\psi^*(R_1,R_3)dR_3$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\omega}\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/2}}}\left(\frac{2^{-(n_{R_1}+n_{R_3})}\omega\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/4}}}{n_{R_1}!n_{R_3}!\pi}\right)\left(\frac{\omega\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}}{2^{(n_{R_2}+n_{R_3})}n_{R_2}!n_{R_3}!\pi}\right)$$
$$(H_{n_{R_1}}(\sqrt{\omega}R_1))\left(H_{n_{R_2}}(\omega^2\pm\lambda^2)^{1/4}R_2)\right) \quad (۱۹)$$

$$\iint e^{\frac{-\omega R_1^2}{2}}e^{\frac{-\omega\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_3^2}{2}}e^{\frac{-\omega\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_2^2}{2}}\frac{e^{\frac{-1}{2}\left(\omega R_1^2+\sqrt{\omega^2\pm\lambda^2}R_2^2+\sqrt{\omega^2\pm\lambda^2}R_3^2\right)}}{\pi^{3/4}}\left(H_{n_{R3}}(\omega^2\pm\lambda^2)^{1/4}R_3)\right)^2$$
$$d\left(\left(\omega^2\pm\lambda^2\right)^{1/4}R_3\right)$$
$$=e^{\frac{-\omega}{2}\left(R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_2^2\right)}\sqrt{\frac{2^{-(n_{R_1}+n_{R2})}\omega\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/4}}}{n_{R_1}!n_{R_3}!\pi}}(H_{n_{R_1}}(\sqrt{\omega}R_1))\left(H_{n_{R_2}}(\omega^2\pm\lambda^2)^{1/4}R_2)\right)$$

با استفاده از رابطه ی (۱۲) و محاسبه‌ی $\psi(R_1,R_2)$ می‌توان $\rho(R_1,R_3)$ را به دست آورد.

(۲۰)

$$\psi(R_1,R_2)=e^{\frac{-\omega R_1^2}{2}}e^{\frac{-\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_2^2}{2}}\sqrt{\frac{2^{-(n_{R_1}+n_{R_2})}\omega\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/4}}{n_{R_1}!n_{R_2}!\pi}}\left(H_{n_{R_1}}(\omega R_1)\left(H_{n_{R2}}(\omega^2\pm\lambda^2)^{1/4}R_2)\right)\right)$$

(۲۱)

$$\rho(R_1,R_3)=\int\psi(R_2,R_3)\psi^*(R_1,R_2)dR_2=\frac{1}{\sqrt{\omega}\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/2}}}e^{\frac{-\omega R_1^2}{2}}e^{\frac{-\omega\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_2^2}{2}}$$

$$\left(\frac{\omega\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/4}}}{2^{(n_{R_2}+n_{R_3})}n_{R_2}!n_{R_2}!\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{2^{-(n_{R_2}+n_{R_2})}\omega\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}}{n_{R_2}!n_{R_1}!\pi}\right)^{1/2}(H_{n_{R_1}}(\sqrt{\omega}R_1))\left(H_{n_{R_3}}(\omega^2\pm\lambda^2)^{1/4}R_3)\right)$$

$$\iint e^{\frac{-\omega\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_2^2}{2}}\left(H_{n_{R2}}(\omega^2\pm\lambda^2)^{1/4}R_2)\right)^2 d\left(\left(\omega^2\pm\lambda^2\right)^{1/4}R_2\right)$$

$$=e^{\frac{-\omega}{2}\left(R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_3^2\right)}\sqrt{\frac{2^{-(n_{R_1}+n_{R_3})}\omega\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/4}}}{n_{R_1}!n_{R_3}!\pi}}(H_{n_{R_1}}(\sqrt{\omega}R_1))\left(H_{n_{R_3}}(\omega^2\pm\lambda^2)^{1/4}R_3)\right)$$

همچنین، برای محاسبه ی $\rho(R_2,R_3)$ خواهیم داشت:

(۲۲)

$$\rho(R_2,R_3)=\int\psi(R_2,R_1)\psi^*(R_1,R_3)dR_1=\frac{1}{\sqrt{\omega}}e^{\frac{-\omega\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_2^2}{2}}e^{\frac{-\omega\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_3^2}{2}}$$

$$\left(\frac{2^{-(n_{R_1}+n_{R_2})}\omega\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/4}}}{n_{R_1}!n_{R_2}!\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{2^{-(n_{R_1}+n_{R_3})}\omega\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}}{n_{R_1}!n_{R_3}!\pi}\right)^{1/2}\left(H_{n_{R_2}}(\omega^2\pm\lambda^2)^{1/4}R_2)\right)$$

$$\left(H_{n_{R_3}}(\omega^2\pm\lambda^2)^{1/4}R_3)\right)\iint e^{\frac{-\omega R_1^2}{2}}\left(H_{n_{R1}}(\sqrt{\omega}R_1)\right)^{22}d\left(\sqrt{\omega}R_1\right)$$

$$=\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{2^{-(n_{R_2}+n_{R_3})}\omega}{n_{R_2}!n_{R_3}!\pi}}e^{\frac{-\omega\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}(R_2^2+R_3^2)}{2}}\left(H_{n_{R_2}}(\omega^2\pm\lambda^2)^{1/4}R_2)\right)\left(H_{n_{R_3}}(\omega^2\pm\lambda^2)^{1/4}R_3)\right)$$

با توجه به ویژگی هرمیتی بودن ماتریس چگالی کاهش‌یافته‌ی تک ذره $\rho(x_i, x_j) = \rho^*(x_i, x_j)$ برای دیگر آرایه‌ها خواهیم داشت.

$$\rho(R_1,R_2)=\rho(R_2,R_1),\quad \rho(R_1,R_3)=\rho(R_3,R_1),\quad \rho(R_2,R_3)=\rho(R_3,R_2) \qquad (۲۳)$$

روابط (۱۸) تا (۲۲) آرایه‌های ماتریس چگالی را تشکیل می‌دهند. حال با به‌کارگیری این روابط و تشکیل ماتریس چگالی می‌توان آنتروپی فون- نیومن را برای حالت‌های مورد نظر حساب کرد. همچنین، می‌توان $\tau = \lambda / \omega$ را در محاسبات به‌کار برد. در نهایت ماتریس چگالی مورد نظر بر حسب مختصات ژاکوبی را به صورت زیر خواهیم داشت:

(۲۴)

$$\Gamma\left(R_1,R_2,R_3\,\middle|\,R_1',R_2',R_3'\right)=\frac{1}{3!}\begin{vmatrix}\rho(R_1,R_1') & \rho(R_1,R_2') & \rho(R_1,R_3')\\ \rho(R_2,R_1') & \rho(R_2,R_2') & \rho(R_2,R_3')\\ \rho(R_3,R_1') & \rho(R_3,R_2') & \rho(R_3,R_3')\end{vmatrix}$$

بررسی حالت‌های ویژه:

با استفاده از محاسبات بالا و مقادیر توابع هرمیتی خواهیم داشت:

برای حالت $\left|010\right\rangle$، با قراردادن $n_{R_1}=0, n_{R_2}=1$ و $n_{R_3}=0$ هریک از آرایه‌ها به دست می‌آید.

$$\rho(R_1,R_2)=\left(\frac{2^{-n_{R_1}}\omega}{n_{R_1}!\pi^{1/2}}\right)(H_{n_{R_1}}(\sqrt{\omega}R_1)^2e^{-\omega R_1^2}=\left(\frac{\omega}{\pi^{1/2}}\right)(H_\circ(\sqrt{\omega}R_1)^2e^{-\omega R_1^2}=\left(\frac{\omega e^{-\omega R_1^2}}{\pi^{1/2}}\right)$$

$$\rho(R_2,R_2)=\pi^{1/4}e^{\frac{-\omega\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_2^2}{2}}\left(\frac{2^{-n_{R_2}}\omega}{n_{R_2}!\pi^{1/2}}\right)\left(H_{n_{R_2}}(\omega^2\pm\lambda^2)^{1/4}R_2)\right)=$$

$$\left(2\pi^{1/4}\omega^2\sqrt{1-\tau^2}\right)R_2^2e^{\frac{-\omega\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_2^2}{2}}$$

$$\rho(R_3,R_3)=\pi^{1/4}e^{\frac{-\omega\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_3^2}{2}}\left(\frac{2^{-n_{R_3}}\omega}{n_{R_3}!\pi^{1/2}}\right)\left(H_{n_{R_3}}(\omega^2\pm\lambda^2)^{1/4}R_3)\right)=\pi^{1/4}\omega e^{-\omega\sqrt{1\pm\tau^2}R_3^2}$$

$$\rho(R_1,R_2)=\rho(R_2,R_1)=e^{\frac{-\omega\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_2^2\right]}{2}}\left(\frac{2^{-(n_{R_1}+n_{R_2})}\omega\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/4}}}{n_{R_1}!n_{R_2}!\pi}\right)$$

$$(H_{n_{R_1}}(\sqrt{\omega}R_1))\left(H_{n_{R_2}}(\omega^2\pm\lambda^2)^{1/4}R_2)\right)=\omega(1\pm\tau^2)^{1/4}\left(\frac{2\omega\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)^{1/4}}}{\pi}\right)R_2e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_2^2\right]}$$

$$\rho(R_1,R_3)=\rho(R_3,R_1)=e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_3^2\right]}\left(\frac{2^{-(n_{R_1}+n_{R_3})}\omega\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^{3/4}}}{n_{R_1}!n_{R_3}!\pi}\right)(H_{n_{R_1}}(\sqrt{\omega}R_1))$$

$$\left(H_{n_{R_3}}(\omega^2\pm\lambda^2)^{1/4}R_3)\right)=\left(\frac{\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)^{3/4}}}{\pi}\right)e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_3^2\right]}$$

$$\rho(R_2,R_3)=\rho(R_3,R_2)=\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/4}\left(\frac{2^{-(n_{R_2}+n_{R_3})}\omega\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/4}}}{n_{R_2}!n_{R_3}!\pi}\right)e^{\frac{-\omega}{2}\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}\left[R_2^2+R_3^2\right]}$$

$$\left(H_{n_{R_2}}(\omega^2\pm\lambda^2)^{1/4}R_2)\right)\left(H_{n_{R_3}}(\omega^2\pm\lambda^2)^{1/4}R_3)\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}R_2\sqrt{(1\pm\tau^2)}R_3e^{\frac{-\omega}{2}\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}\left[R_2^2+R_3^2\right]}$$

و با جایگذاری این درایه‌ها برای ماتریس چگالی مورد نظر بر حسب مختصات ژاکوبی داریم:

$$\Gamma\left(R_1,R_2,R_3\middle|R_1',R_2',R_3'\right)=\frac{1}{3!}$$
$$\begin{vmatrix}
\frac{\omega e^{-\omega R_1^2}}{\sqrt{\pi}} & \omega(1\pm\tau^2)^{1/4}\left(\frac{2\omega\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)^{1/4}}}{\pi}\right)R_2 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_2^2\right]} & \left(\frac{\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)^{3/4}}}{\pi}\right)e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_3^2\right]} \\
\omega(1\pm\tau^2)^{1/4}\left(\frac{2\omega\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)^{1/4}}}{\pi}\right)R_2 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_2^2\right]} & \left(2\pi^{1/4}\omega^2\sqrt{1-\tau^2}\right)R_2^2 e^{\frac{-\omega\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_2^2}{2}} & \sqrt{\frac{2}{\pi}}R_2\sqrt{(1\pm\tau^2)}R_3 e^{\frac{-\omega}{2}\sqrt{(1\pm\tau^2)}\left[R_2^2+R_3^2\right]} \\
\left(\frac{\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)^{3/4}}}{\pi}\right)e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_3^2\right]} & \sqrt{\frac{2}{\pi}}R_2\sqrt{(1\pm\tau^2)}R_3 e^{\frac{-\omega}{2}\sqrt{(1\pm\tau^2)}\left[R_2^2+R_3^2\right]} & \pi^{1/4}\omega e^{-\omega\sqrt{1\pm\tau^2}R_3^2}
\end{vmatrix}$$

همان‌طور که می‌دانیم، در حالت غیرجفت‌شدگی سامانه، $\tau \to 0$ (برای نمونه متناظر با $\lambda \to 0$ یا معادل با $\lambda \to \Lambda$) ودر حالت جفت‌شدگی $\tau \to \infty$ $\left(\tau \to \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$درنظر گرفته شد. از این رو، جفت‌شدگی سامانه به صورت زیر خواهد بود.

$$\Gamma\left(R_1,R_2,R_3\middle|R_1',R_2',R_3'\right)=\frac{1}{3!}$$
$$\begin{vmatrix}
\frac{\omega e^{-\omega R_1^2}}{\sqrt{\pi}} & \omega\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}R_2 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+R_2^2\right]} & \sqrt{\frac{1}{\pi}}e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+R_3^2\right]} \\
\omega\sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}R_2 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+R_2^2\right]} & \left(2\pi^{1/4}\omega^2\right)R_2^2 e^{\frac{-\omega R_2^2}{2}} & \sqrt{\frac{2}{\pi}}R_2 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_2^2+R_3^2\right]} \\
\sqrt{\frac{1}{\pi}}e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+R_3^2\right]} & \sqrt{\frac{2}{\pi}}R_2 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_2^2+R_3^2\right]} & \pi^{1/4}\omega e^{-\omega R_3^2}
\end{vmatrix}$$

برای دیگر حالت‌ها نیز به همین صورت می‌توان آرایه‌های ماتریس چگالی را محاسبه کرد:
برای حالت $\langle 011|$، با جایگذاری $n_{R_1}=0, n_{R_2}=1$ و $n_{R_3}=1$ هریک از آرایه‌ها به دست می‌آید.

$$\Gamma\left(R_1,R_2,R_3\middle|R_1',R_2',R_3'\right)=\frac{1}{3!}\begin{vmatrix} \frac{\omega e^{-\omega R_1^2}}{\sqrt{\pi}} & \omega\left(\frac{2\omega\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)^{5/4}}}{\pi}\right)R_2 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_2^2\right]} & \sqrt{\frac{\left(1\pm\tau^2\right)^{5/4}}{\pi}}R_2 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_3^2\right]} \\ \omega\left(\frac{2\omega\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)^{5/4}}}{\pi}\right)R_2 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_2^2\right]} & \left(2\pi^{1/4}\omega^2\sqrt{1-\tau^2}\right)R_2^2 e^{\frac{-\omega\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_2^2}{2}} & \frac{2}{\sqrt{\pi}}\omega^{3/2}R_2(1\pm\tau^2)^{3/4}R_3 e^{\frac{-\omega}{2}\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}\left[R_2^2+R_3^2\right]} \\ \sqrt{\frac{2\omega\left(1\pm\tau^2\right)^{5/4}}{\pi}}e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_3^2\right]} & \frac{2}{\sqrt{\pi}}\omega^{3/2}R_2(1\pm\tau^2)^{3/4}R_3 e^{\frac{-\omega}{2}\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}\left[R_2^2+R_3^2\right]} & 2\omega\pi^{1/4}\sqrt{1\pm\tau^2}R_3^2 e^{-\omega\sqrt{1\pm\tau^2}R_3^2} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{3!}\begin{vmatrix} \frac{4\omega^2 e^{-\omega R_1^2}}{\sqrt{\pi}} & \omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}R_2 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+R_2^2\right]} & \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}R_3 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+R_3^2\right]} \\ \omega\sqrt{\frac{2}{\pi}}R_2 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+R_2^2\right]} & \left(2\pi^{1/4}\omega^2\right)R_2^2 e^{-\omega R_2^2} & \frac{2}{\sqrt{\pi}}\omega^{3/2}R_2R_3 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_2^2+R_3^2\right]} \\ \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}R_3 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+R_3^2\right]} & \frac{2}{\sqrt{\pi}}\omega^{3/2}R_2R_3 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_2^2+R_3^2\right]} & \left(2\pi^{1/4}\omega^2\right)R_3^2 e^{-\omega R_3^2} \end{vmatrix}$$

برای حالت $\left|110\right\rangle$ ، با جایگذاری $n_{R_1}=1, n_{R_2}=1$ و $n_{R_3}=0$ هریک از آرایه‌ها به دست می‌آید.

$$\Gamma\left(R_1,R_2,R_3\middle|R_1',R_2',R_3'\right)=\frac{1}{3!}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{4\omega^2 e^{-\omega R_1^2}}{\sqrt{\pi}} & 2\omega^{3/2}\sqrt{\frac{\left(1\pm\tau^2\right)^{5/4}}{\pi}}R_1R_2e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_2^2\right]} & \sqrt{\frac{2\omega\left(1\pm\tau^2\right)^{3/4}}{\pi}}R_1e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_3^2\right]} \\ 2\omega^{3/2}\sqrt{\frac{\left(1\pm\tau^2\right)^{5/4}}{\pi}}R_1R_2e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_2^2\right]} & \left(2\pi^{1/4}\omega^2\sqrt{1-\tau^2}\right)R_2^2e^{\frac{-\omega\sqrt{\left(1\pm\frac{\lambda^2}{\omega^2}\right)}R_2^2}{2}} & \sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega\sqrt{1\pm\tau^2}R_1e^{\frac{-\omega}{2}\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}\left[R_2^2+R_3^2\right]} \\ \sqrt{\frac{2\omega\left(1\pm\tau^2\right)^{3/4}}{\pi}}R_1e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_3^2\right]} & \sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega\sqrt{1\pm\tau^2}R_1e^{\frac{-\omega}{2}\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}\left[R_2^2+R_3^2\right]} & \omega^2\pi^{1/4}\sqrt{1\pm\tau^2}R_3^2e^{-\omega\sqrt{1\pm\tau^2}R_3^2} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{3!}\begin{vmatrix} \frac{4\omega^2 e^{-\omega R_1^2}}{\sqrt{\pi}} & 2\omega^{3/2}\pi^{-1/2}R_1R_2e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+R_2^2\right]} & \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}R_1e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+R_3^2\right]} \\ 2\omega^{3/2}\pi^{-1/2}R_1R_2e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+R_2^2\right]} & \left(2\pi^{1/4}\omega^2\right)R_2^2e^{-\omega R_2^2} & \sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega R_1e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_2^2+R_3^2\right]} \\ \sqrt{\frac{2\omega}{\pi}}R_1e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+R_3^2\right]} & \sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega R_1e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_2^2+R_3^2\right]} & \omega^2\pi^{1/4}R_3^2e^{-\omega R_3^2} \end{vmatrix}$$

برای حالت $\left|101\right\rangle$، با جایگذاری $n_{R_1}=0, n_{R_2}=1$ و $n_{R_3}=1$ هریک از آرایه‌ها به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\Gamma\left(R_1,R_2,R_3\middle|R_1',R_2',R_3'\right)=\frac{1}{3!}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{4\omega^2R_1^2e^{-\omega R_1^2}}{\sqrt{\pi}} & \omega\sqrt{\frac{\left(1\pm\tau^2\right)^{3/4}}{\pi}}R_1e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_2^2\right]} & 2\omega\sqrt{\frac{\left(1\pm\tau^2\right)^{5/4}}{\pi}}R_1e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_3^2\right]} \\ \omega\sqrt{\frac{\left(1\pm\tau^2\right)^{3/4}}{\pi}}R_1e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_2^2\right]} & \left(\omega\pi^{1/4}\right)R_2^2e^{\frac{-\omega\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_2^2}{2}} & \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega\sqrt{1\pm\tau^2}}{\sqrt{\pi}}R_2e^{\frac{-\omega}{2}\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}\left[R_2^2+R_3^2\right]} \\ 2\omega\sqrt{\frac{\left(1\pm\tau^2\right)^{5/4}}{\pi}}R_1e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_3^2\right]} & \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega\sqrt{1\pm\tau^2}}{\sqrt{\pi}}R_2e^{\frac{-\omega}{2}\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}\left[R_2^2+R_3^2\right]} & 2\omega^2\pi^{1/4}\sqrt{1\pm\tau^2}R_2^2e^{-\omega\sqrt{1\pm\tau^2}R_2^2} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{3!}\begin{vmatrix} \frac{4\omega^2 R_1^2 e^{-\omega R_1^2}}{\sqrt{\pi}} & \omega\sqrt{\frac{\left(1\pm\tau^2\right)^{3/4}}{\pi}}R_1 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_2^2\right]} & 2\omega\sqrt{\frac{\left(1\pm\tau^2\right)^{5/4}}{\pi}}R_1R_3 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_3^2\right]} \\ \omega\sqrt{\frac{2\left(1\pm\tau^2\right)^{3/4}}{\pi}}R_1 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_2^2\right]} & \left(\omega\pi^{1/4}\right)R_2 e^{-\omega\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_2^2} & \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega\sqrt{1\pm\tau^2}}{\sqrt{\pi}}R_3 e^{\frac{-\omega}{2}\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}\left[R_2^2+R_3^2\right]} \\ 2\omega\sqrt{\frac{\left(1\pm\tau^2\right)^{5/4}}{\pi}}R_1R_3 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_3^2\right]} & \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega\sqrt{1\pm\tau^2}}{\sqrt{\pi}}R_3 e^{\frac{-\omega}{2}\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}\left[R_2^2+R_3^2\right]} & 2\omega^2\pi^{1/4}\sqrt{1\pm\tau^2}R_3^2 e^{-\omega\sqrt{1\pm\tau^2}R_2^2} \end{vmatrix}$$

برای حالت $\left|111\right\rangle$، با جایگذاری $n_{R_1}=1, n_{R_2}=1$ و $n_{R_3}=1$ و محاسبه‌ی آرایه‌ها داریم:

$$\Gamma\left(R_1,R_2,R_3\middle|R_1',R_2',R_3'\right)=\frac{1}{3!}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{2R_1^2\sqrt{1\pm\tau^2}e^{-\omega R_1^2}}{\sqrt{\pi}} & 2\omega^2\sqrt{\frac{\left(1\pm\tau^2\right)^{5/4}}{\pi}}R_1R_2 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_2^2\right]} & 2\omega^2\sqrt{\frac{\left(1\pm\tau^2\right)^{5/4}}{\pi}}R_1R_3 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_3^2\right]} \\ 2\omega^2\sqrt{\frac{\left(1\pm\tau^2\right)^{5/4}}{\pi}}R_1R_2 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_2^2\right]} & \left(2\omega^2\pi^{1/4}\right)\left(1\mp\tau^2\right)R_2^2 e^{\frac{-\omega\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_2^2}{2}} & 2\omega^2\frac{\left(1\pm\tau^2\right)^{3/4}}{\sqrt{\pi}}R_2R_3 e^{\frac{-\omega}{2}\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}\left[R_2^2-R_3^2\right]} \\ 2\omega^2\sqrt{\frac{\left(1\pm\tau^2\right)^{5/4}}{\pi}}R_1R_3 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_3^2\right]} & 2\omega^2\frac{\left(1\pm\tau^2\right)^{3/4}}{\sqrt{\pi}}R_2R_3 e^{\frac{-\omega}{2}\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}\left[R_2^2-R_3^2\right]} & 2\omega^2\pi^{1/4}\left(1+\tau^2\right)R_3^2 e^{-\omega\sqrt{1\pm\tau^2}R_2^2} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{3!}\begin{vmatrix} \frac{2R_1^2 e^{-\omega R_1^2}}{\sqrt{\pi}} & \frac{2\omega^2}{\sqrt{\pi}}R_1R_2 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+R_2^2\right]} & \frac{2\omega^2}{\sqrt{\pi}}R_1R_3 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+R_3^2\right]} \\ \frac{2\omega^2}{\sqrt{\pi}}R_1R_2 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+R_2^2\right]} & \left(2\omega^2\pi^{1/4}\right)R_2^2 e^{-\omega R_2^2} & \frac{2\omega^2}{\sqrt{\pi}}R_2R_3 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_2^2-R_3^2\right]} \\ \frac{2\omega^2}{\sqrt{\pi}}R_1R_3 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+R_3^2\right]} & \frac{2\omega^2}{\sqrt{\pi}}R_2R_3 e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_2^2-R_3^2\right]} & 2\omega^2\pi^{1/4}R_3^2 e^{-\omega R_3^2} \end{vmatrix}$$

همچنین، برای حالت $\left|021\right\rangle$، با جایگذاری $n_{R_1}=0, n_{R_2}=2$ و $n_{R_3}=1$ و محاسبه آرایه‌ها داریم:

$$\Gamma\left(R_1,R_2,R_3\middle|R_1',R_2',R_3'\right)=\frac{1}{3!}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\omega\sqrt{1\pm\tau^2}e^{-\omega R_1^2}}{\sqrt{\pi}} & \omega\sqrt{\frac{\left(1\pm\tau^2\right)^{5/4}}{8\pi}}(-2+4\sqrt{1\pm\tau^2}\,\omega R_2^2)e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{(1\pm\tau^2)}R_2^2\right]} & \omega^{1/2}\sqrt{\frac{2\left(1\pm\tau^2\right)^{5/4}}{\pi}}R_3e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{(1\pm\tau^2)}R_3^2\right]} \\ \omega\sqrt{\frac{\left(1\pm\tau^2\right)^{5/4}}{8\pi}}(-2+4\sqrt{1\pm\tau^2}\,\omega R_2^2)e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+\sqrt{(1\pm\tau^2)}R_2^2\right]} & \frac{\omega\pi^{1/4}\sqrt{1\pm\tau^2}}{8}(-2+4\sqrt{1\pm\tau^2}\,\omega R_2^2)e^{\frac{-\omega}{2}\left[\sqrt{(1\pm\tau^2)}R_2^2\right]} & \frac{\omega^{3/2}}{\pi^{1/2}}\sqrt{1\pm\tau^2}(-1+2\sqrt{1\pm\tau^2}\,\omega R_2^2)R_3e^{\frac{-\omega}{2}\sqrt{(1\pm\tau^2)}\left[R_2^2-R_3^2\right]} \\ \omega^{2/3}\sqrt{\frac{2\left(1\pm\tau^2\right)^{5/4}}{\pi}}R_2e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2-\sqrt{(1\pm\tau^2)}R_3^2\right]} & \frac{\omega^{3/2}}{\pi^{1/2}}\sqrt{1\pm\tau^2}(-1+2\sqrt{1\pm\tau^2}\,\omega R_2^2)R_3e^{\frac{-\omega}{2}\sqrt{(1\pm\tau^2)}\left[R_2^2-R_3^2\right]} & 2\omega^2\pi^{1/4}\left(1+\tau^2\right)R_3^2e^{-\omega\sqrt{1\pm\tau^2}R_2^2} \end{vmatrix}$$

$$\Gamma\left(R_1,R_2,R_3\middle|R_1',R_2',R_3'\right)=\frac{1}{3!}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\omega e^{-\omega R_1^2}}{\sqrt{\pi}} & \frac{\omega}{\sqrt{8\pi}}(-2+4\omega R_2^2)e^{\frac{\omega}{2}\left[R_1^2-R_2^2\right]} & \omega^{3/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}R_3e^{\frac{\omega}{2}\left[R_1^2-R_3^2\right]} \\ \frac{\omega}{\sqrt{8\pi}}(-2+4\omega R_2^2)e^{\frac{\omega}{2}\left[R_1^2-R_2^2\right]} & \frac{\omega\pi^{1/4}}{8}(-2+4\omega R_2^2)e^{\frac{-\omega R_1^2}{2}} & \frac{\omega^{3/2}}{\pi^{1/2}}(-1+2\omega R_2^2)R_2e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_2^2+R_3^2\right]} \\ \omega^{3/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}R_3e^{\frac{\omega}{2}\left[R_1^2-R_3^2\right]} & \frac{\omega^{3/2}}{\pi^{1/2}}(-1+2\omega R_2^2)R_2e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_2^2+R_3^2\right]} & 2\omega^2\pi^{1/4}\left(1+\tau^2\right)R_3^2e^{-\omega\sqrt{1\pm\tau^2}R_2^2} \end{vmatrix}$$

برای حالت $\left|012\right\rangle$ ، نیز با قراردادن $n_{R_1}=0, n_{R_2}=1$ و $n_{R_3}=2$ و محاسبه‌ی آرایه‌ها داریم:

$$\Gamma\left(R_1,R_2,R_3\middle|R_1',R_2',R_3'\right)=\frac{1}{3!}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\omega\sqrt{1\pm\tau^2}e^{-\omega R_1^2}}{\sqrt{\pi}} & \omega^{3/2}\sqrt{\frac{2\left(1\pm\tau^2\right)^{5/4}}{\pi}}R_2e^{\frac{\omega}{2}\left[R_1^2-\sqrt{(1\pm\tau^2)}R_2^2\right]} & \omega\sqrt{\frac{\left(1\pm\tau^2\right)^{3/4}}{8\pi}}(-2+4\sqrt{1-\tau^2})\omega R_3^2e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2-\sqrt{(1\pm\tau^2)}R_3^2\right]} \\ \omega^{3/2}\sqrt{\frac{2\left(1\pm\tau^2\right)^{5/4}}{\pi}}R_2e^{\frac{\omega}{2}\left[R_1^2-\sqrt{(1\pm\tau^2)}R_2^2\right]} & \left(2\pi^{1/4}\omega^2(1\pm\tau^2)\right)R_2^2e^{-\omega\sqrt{(1\pm\tau^2)}R_2^2} & \frac{\omega^{3/2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{1\pm\tau^2}(-1+2\sqrt{1\pm\tau^2}\,\omega R_3^2)R_2e^{\frac{-\omega}{2}\sqrt{(1\pm\tau^2)}\left[R_2^2+R_3^2\right]} \\ \omega\sqrt{\frac{\left(1\pm\tau^2\right)^{3/4}}{8\pi}}(-2+4\sqrt{1-\tau^2})\omega R_3^2e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2-\sqrt{(1\pm\tau^2)}R_3^2\right]} & \frac{\omega^{3/2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{1\pm\tau^2}(-1+2\sqrt{1\pm\tau^2}\,\omega R_3^2)R_2e^{\frac{-\omega}{2}\sqrt{(1\pm\tau^2)}\left[R_2^2+R_3^2\right]} & \frac{\omega\pi^{1/4}\sqrt{1\pm\tau^2}}{4}(-1+2\sqrt{1\pm\tau^2}\,\omega R_3^2)^2e^{-\omega\sqrt{1\pm\tau^2}R_3^2} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{3!}\begin{vmatrix} \frac{\omega e^{-\omega R_1^2}}{\sqrt{\pi}} & \omega^{3/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}R_2e^{\frac{\omega}{2}\left[R_1^2-R_2^2\right]} & \frac{\omega}{8\pi}(-2+4\omega R_3^2)e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2-R_3^2\right]} \\ \omega^{3/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}R_2e^{\frac{\omega}{2}\left[R_1^2-R_2^2\right]} & 2\pi^{1/4}\omega^2R_2^2e^{-\omega R_2^2} & \frac{\omega^{3/2}}{\sqrt{\pi}}(-1+2\omega R_3^2)R_2e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_2^2+R_3^2\right]} \\ \frac{\omega}{8\pi}(-2+4\omega R_3^2)e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2-R_3^2\right]} & \frac{\omega^{3/2}}{\sqrt{\pi}}(-1+2\omega R_3^2)R_2e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_2^2+R_3^2\right]} & \frac{\omega\pi^{1/4}}{4}(-1+2\omega R_3^2)^2e^{-\omega R_3^2} \end{vmatrix}$$

برای حالت $\left|210\right\rangle$، با قراردادن $n_{R_1}=2, n_{R_2}=1$ و $n_{R_3}=0$ و محاسبه‌ی آرایه‌ها داریم:

$$\Gamma\left(R_1,R_2,R_3\middle|R_1',R_2',R_3'\right)=\frac{1}{3!}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\omega\sqrt{1\pm\tau^2}}{8\sqrt{\pi}}(-2+4\omega R_1^2)e^{-\omega R_1^2} & \omega^{3/2}\sqrt{\frac{\left(1\pm\tau^2\right)^{5/4}}{\pi}}(-1+2\omega R_1^2)e^{\frac{\omega}{2}\left[R_1^2-\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_2^2\right]} & \omega\sqrt{\frac{\left(1\pm\tau^2\right)^{3/4}}{8\pi}}(-2+4\omega R_1^2)e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2-\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_3^2\right]} \\ \omega^{3/2}\sqrt{\frac{\left(1\pm\tau^2\right)^{5/4}}{\pi}}(-1+2\omega R_1^2)e^{\frac{\omega}{2}\left[R_1^2-\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_2^2\right]} & \left(2\pi^{1/4}\omega^2(1\pm\tau^2)\right)R_2^2e^{-\omega\sqrt{1\pm\tau^2}R_2^2} & \sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega^{3/2}\sqrt{1\pm\tau^2}R_2e^{\frac{\omega}{2}\sqrt{1\pm\tau^2}\left[-R_2^2+R_3^2\right]} \\ \omega\sqrt{\frac{\left(1\pm\tau^2\right)^{3/4}}{8\pi}}(-2+4\omega R_1^2)e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2-\sqrt{\left(1\pm\tau^2\right)}R_3^2\right]} & \sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega^{3/2}\sqrt{1\pm\tau^2}R_2e^{\frac{\omega}{2}\sqrt{1\pm\tau^2}\left[-R_2^2+R_3^2\right]} & \omega\pi^{1/4}\sqrt{1\pm\tau^2}e^{-\omega\sqrt{1\pm\tau^2}R_3^2} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{3!}\begin{vmatrix} \frac{\omega}{8\sqrt{\pi}}(-2+4\omega R_1^2)e^{-\omega R_1^2} & \frac{\omega^{3/2}}{\sqrt{\pi}}(-1+2\omega R_1^2)e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+R_2^2\right]} & \frac{\omega}{\sqrt{8\pi}}(-2+4\omega R_1^2)e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2-R_3^2\right]} \\ \frac{\omega^{3/2}}{\sqrt{\pi}}(-1+2\omega R_1^2)e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2+R_2^2\right]} & \left(2\pi^{1/4}\omega^2\right)R_2^2e^{-\omega R_2^2} & \sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega^{3/2}R_2e^{\frac{\omega}{2}\left[-R_2^2+R_3^2\right]} \\ \frac{\omega}{\sqrt{8\pi}}(-2+4\omega R_1^2)e^{\frac{-\omega}{2}\left[R_1^2-R_3^2\right]} & \sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega^{3/2}R_2e^{\frac{\omega}{2}\left[-R_2^2+R_3^2\right]} & \omega\pi^{1/4}e^{-\omega R_3^2} \end{vmatrix}$$

بعد از محاسبه‌ی ماتریس چگالی، آن را قطری کرده، ویژه مقادیر را به دست آورده و سپس با استفاده از رابطه ی (۸) می‌توان آنتروپی فون- نیومن را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow S(\rho_1)=-\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i = \lambda_1 \log_2 \lambda_1 - \lambda_2 \log_2 \lambda_2 - \lambda_3 \log_2 \lambda_3$$

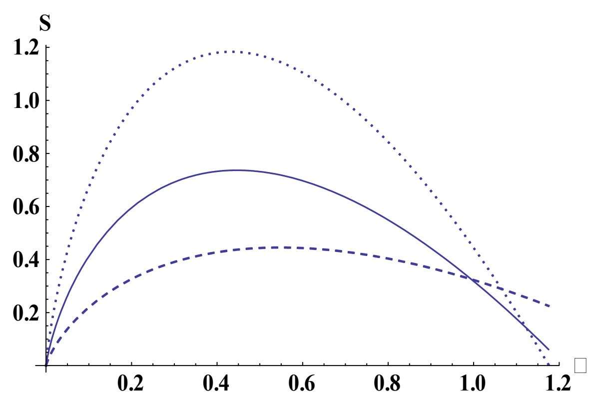
برای محاسبه‌ی ماتریس چگالی، مقادیر R_1 و R_2 R_3 که بر حسب مختصات سه ذره می‌باشند را می‌توان برای یک اتم سه ذره‌ای مانند لیتیوم به صورت زیر در نظر گرفت. اتم لیتیوم، عنصر شیمیایی است با نشان Li و عدد اتمی ۳ که در جدول تناوبی به همراه فلزات قلیایی در گروه ۱ قرار دارد. ساختار الکترونی آن به صورت $1s^2, 2s^1$ می‌باشد و در بیرونی‌ترین لایه‌ی خود یک الکترون دارد. شعاع اتمی آن ۱۶۷پیکومتر می‌باشد.

$$R_1 = 0.025114\times10^{-5},\quad R_2 = 0.01183\times10^{-5},\quad R_3 = -0.01555\times10^{-5}$$

حال با استفاده از مقادیر بالا می‌توان آنتروپی را برای حالت‌های مختلف برحسب ω به دست آورد، که در زیر آمده است.

$$\begin{aligned}
|010\rangle &\Rightarrow 0.44427\omega - 1.89552\omega\log_2\omega \\
|011\rangle &\Rightarrow 0.32292\omega - 0.56418\omega\log_2\omega \\
|210\rangle &\Rightarrow 0.31831\omega(-1.14472+\log_2\omega)
\end{aligned}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود درهم‌تنیدگی هر کدام از سه حالت معرفی شده در بالا وابسته به بسامد میدان هماهنگ خارجی است. در شکل(۱)، چگونگی تغییرات آنتروپی درهم‌تنیدگی بر حسب بسامد رسم شده است.



شکل۱ تغییرات آنتروپی برحسب بسامد میدان هماهنگ خارجی، نقطه چین حالت ۰۱۰، خط چین حالت ۰۱۱ و خط توپر حالت ۲۱۰ است.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از ماتریس چگالی، و محاسبه‌ی آنتروپی ون- نیومن، میزان درهم‌تنیدگی حالت‌های معرفی شده محاسبه شد. ماتریس چگالی دارای تمام اطلاعاتی است که می‌توان از دستگاه کوانتومی کسب نمود. آنتروپی فون- نیومن برای سامانه‌های حالت خالص کارایی بیشتری

نسبت به حالت‌های آمیخته دارد. با درنظر گرفتن درهم‌تنیدگی تولید شده توسط درجه‌ی آزادی فضایی، درهم‌تنیدگی حالت پایه سامانه‌های بس- ذره‌ای با استفاده از نظریه‌ی تابعی چگالی بررسی شد. در نظریه‌ی تابعی چگالی اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی تابعی از مقدار میانگین مشاهده‌پذیر است. این روش یک رابطه‌ی مستقیمی را بین درهم‌تنیدگی و انرژی حالت پایه‌ی سامانه‌ی کوانتومی با استفاده از ضرایب میدان برقرار می‌کند که به یک رابطه‌ی قابل‌توجهی بین درهم‌تنیدگی و گذار فاز کوانتومی منجر می‌شود. با توجه به سنجه‌ی مورد استفاده (آنتروپی) در این کار برای بررسی درهم‌تنیدگی اتم موشینسکی تاکنون محاسباتی انجام نگرفته است. همچنین، آنتروپی اتم لیتیوم برای حالت‌های مختلف برحسب ω محاسبه شد و مشاهده شد که درهم‌تنیدگی هر کدام از سه حالت معرفی شده وابسته به بسامد میدان هماهنگ خارجی است.

۶. تقدیر و تشکر

این تحقیق توسط دانشگاه شهید چمران اهواز, ایران[SCU.SP1400.490] پشتیبانی شد.

منابع

[1] De Greef, Jacqueline, “Entanglement and Energy Level Crossing of Spin and Fermi Hamilton Operators”, *University of Johannesburg (South Africa)*, 2013.

[2] H. salehi and N. Binandeh “An Investigation of Entanglement in Helium and Helium-like Atoms”, *Iranian Journal of Applied Physics* **11**(1)، 71-81, 2021, https://doi.org/10.22051/ijap.2021.30106.1145

[3] P. A. Bouvrie، et al. "Quantum entanglement in exactly soluble atomic models: the Moshinsky model with three electrons، and with two electrons in a uniform magnetic field", *The European Physical Journal* **D 66**.1, 2012, https://doi.org/10.1140/epjd/e2011-20417-4

[4] R. J. Yanez، A. R. Plastino، and J. S. Desha، “Quantum entanglement in a soluble two-electron model atom”, *The European Physical Journal,* **D 56**، 141-150, 2010, https://doi.org/10.1140/epjd/e2009-00270-x

[5] A. P. Majtey، A. R. Plastino, and J. S. Dehesa، “The Relationship between entanglement، energy، and level degeneracy in two-electron systems”, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **45**، 115309-115310, 2012, https://doi.org/10.1088/1751-8113/45/11/115309

[6] Y. C. Lin، C. Y. Lin, and K. Ho, “Spatial entanglement in two-electron atomic systems”, *Physical Review A* **87**، 022316- 022321, 2013, https://doi.org/10.1103/PhysRevA.87.022316

[7] R. O. Esquivel، S. L´opez-Rosa and J. S. Dehesa, “Correlation energy as a measure of non-locality: Quantum entanglement of helium-like systems”, *Europhysics Letters*, 111- 116, 2015, https://doi.org/10.1209/0295-5075/111/40009

[8] R. islam،R.Ma، P. Preiss ،M.Eric ، A. Lukin،M.Rispoli and M. Greiner, " Measuring entanglement entropy in aquantum many-body system", *Nature*, 528 ،77-83, 2015, https://doi.org/10.1038/nature15750

[9] Y. Lin،، D. R. Leibrandtm، D. Leibfried،and C.Wen Chou," Quantum entanglement between an atomand a molecule", *Nature* **581** ،253-278, 2020, https://doi.org/10.1038/s41586-020-2257-1

[10] J.H.Warner, M.H. Rummeli, A. Bachmatiuk, and B. Buchner, "Atomic resolution imaging and topography of boron nitride sheets produced by chemical exfoliation", *ACS nano* **4**(3), 1299-1304, 2010, https://doi.org/10.1021/nn901648q

[11] J. P. Dahi," Moshinsky atom and density functional theory — A phase space view1", *Canadian Journal of Chemistry* **87**(7), 784-789, 2009, https://doi.org/10.1139/V09-002

[12] H. Y. Yuan ,and،M.H.Yung, "Anomalous spin entanglement in nonequilibrium systems،" *Phy.Rev A*, **98**، 022125, 2018, https://doi.org/10.1103/PhysRevA.98.022125

[13] P.-O. Löwdin, "Quantum Theory of Many-Particle Systems. II. Study of the Ordinary Hartree-Fock Approximation ", *Phys. Rev,* **97**، 1490, 1955, https://doi.org/10.1103/PHYSREV.97.1490

[14] C. N. Yang, "Concept of Off-Diagonal Long-Range Order and the Quantum Phases of Liquid He and of Superconductors", *Rev. Mod. Phys*. **34**، 694-704, 1964, https://doi.org/10.1103/RevModPhys.34.694

[15] M. Gharib naseri, and H. Salehi, "The effect on entanglement potential using the density-functional theory", *Journal of modern Research physics* **2**(1) ،63-72, 2017, http://dx.doi.org/10.52547/jmrph.2.1.63